

信号与系统

第3章 连续时间信号与系统的频域分析

主讲人：张锦皓 Roger

课件制作：张锦皓 Roger

第3章 连续时间信号与系统的频域分析

3.1 连续时间周期信号的傅里叶级数

3.2 连续时间周期信号的频谱分析

3.3 连续时间信号的傅里叶变换

3.4 傅里叶变换的性质

3.5 周期信号的傅里叶变换

3.6 抽样定理

3.7 连续时间系统的频域分析

3.1 连续时间周期信号的傅里叶级数

三角形式的傅里叶级数

信号的对称性与傅里叶系数的关系

指数形式的傅里叶级数

■ 三角形式的傅里叶级数

三角形式傅里叶级数的定义

在一个周期内：① 函数连续或只有有限个第一类间断点；② 有有限个极大、极小值；③ 函数绝对可积

给定周期为 T 的周期信号 $f(t)$ ，当它满足狄利克雷条件时，可以表示为 $(t_0, t_0 + T)$ 上完备正交函数集合 $\{1, \cos n\Omega t, \sin n\Omega t\} (n \rightarrow \infty, \Omega = 2\pi/T)$ 中各个函数的线性组合，即

$$f(t) = \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{\text{直流分量}} + \sum_{n=1}^{\infty} (\underbrace{a_n \cos n\Omega t}_{n\text{次余弦分量}} + \underbrace{b_n \sin n\Omega t}_{n\text{次正弦分量}})$$

$$\text{基波角频率: } \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\text{基波频率: } f = \frac{1}{T}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt \quad \text{直流分量} \\ a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\Omega t dt, \quad n=1, 2, \dots \quad \text{余弦分量系数} \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\Omega t dt, \quad n=1, 2, \dots \quad \text{正弦分量系数} \end{array} \right.$$

■ 三角形式的傅里叶级数

三角级数的直流、基波、谐波分量

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t)$$

同频率项合并：

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n)$$

$$A_0 = a_0, \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n} \quad a_0 = A_0, \quad a_n = A_n \cos \varphi_n, \quad b_n = -A_n \sin \varphi_n$$

上式表明：任何满足狄利克雷条件的周期信号都可以分解为直流分量、基波分量和无穷多项谐波分量之和。其中各次谐波分量的角频率必然是**基波角频率的整数倍**。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{A_0}{2} = \frac{a_0}{2} \quad \text{直流分量} \quad \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt \\ A_1 \cos(\Omega t + \varphi_1) \quad \text{基波分量} \quad (n=1) \\ A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n) \quad n \text{ 次谐波分量} \quad (n \neq 1) \end{array} \right.$$

A_n : n 次谐波振幅

φ_n : n 次谐波相位

■ 三角形式的傅里叶级数

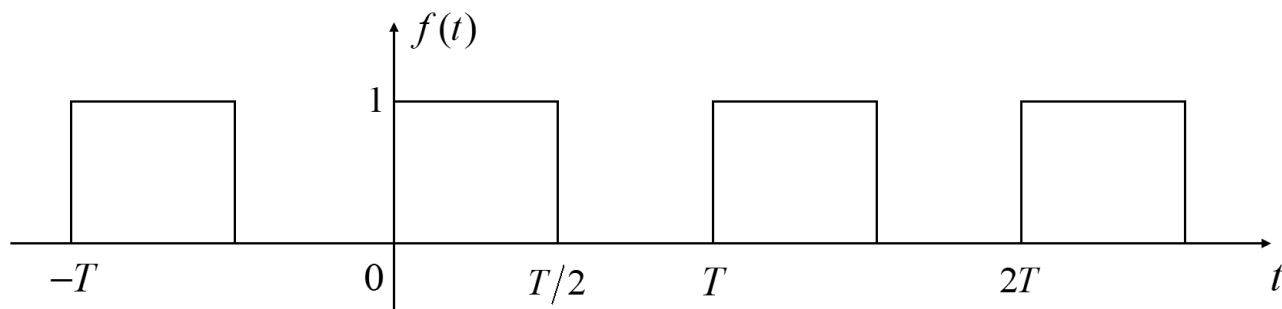
傅里叶系数的奇偶性

将系数视为谐波次数 n 或者 n 倍基波角频率 $n\Omega$ 的函数，以 n 或者 $n\Omega$ 为自变量进行分析：

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\Omega t dt & a_{-n} = a_n \quad n \text{ 的偶函数} \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\Omega t dt & b_{-n} = -b_n \quad n \text{ 的奇函数} \end{array} \right.$$

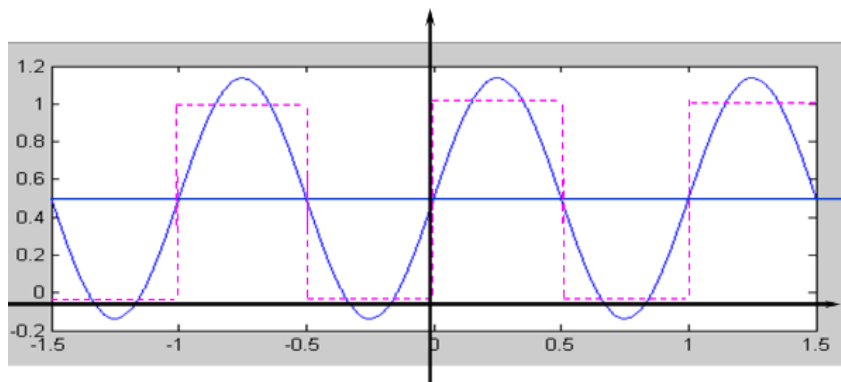
$$\left\{ \begin{array}{ll} A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} & A_{-n} = A_n \quad n \text{ 的偶函数} \\ \varphi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n} & \varphi_{-n} = -\varphi_n \quad n \text{ 的奇函数} \end{array} \right.$$

例题1 把下图所示的周期信号展开为三角形式的傅里叶级数。

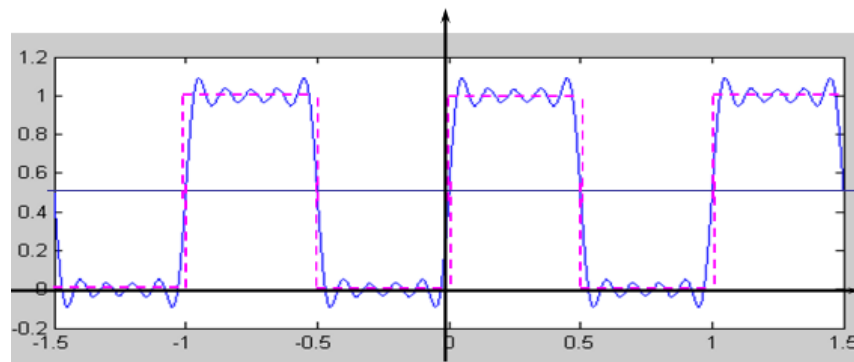


$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left[\sin \Omega t + \frac{1}{3} \sin 3\Omega t + \cdots + \frac{1}{2n+1} \sin (2n+1)\Omega t + \cdots \right], \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

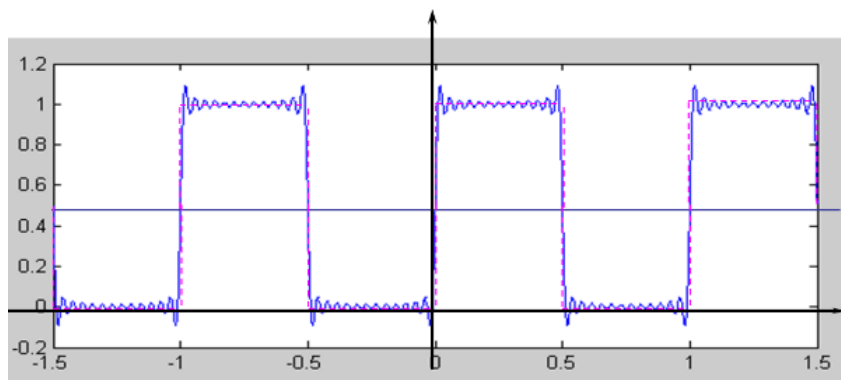
- 周期方波信号，低频谐波振幅大，构成波形主体，高频谐波振幅小，影响波形细节，所包含高次谐波越多，波形边缘越陡峭。



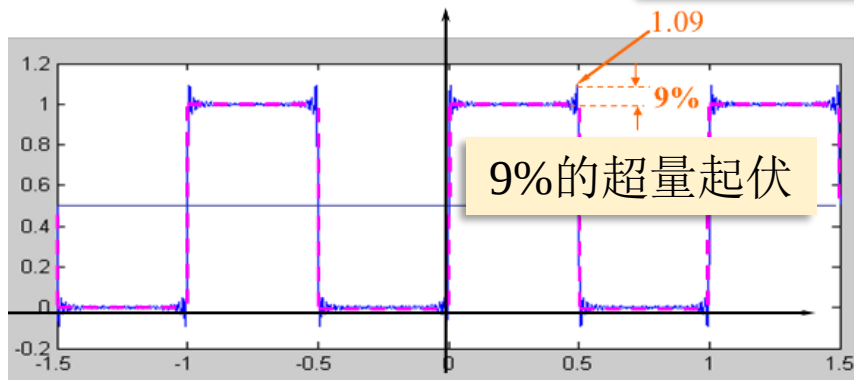
直流 + 基波



直流 + 5个谐波 吉布斯现象



直流 + 13个谐波



直流 + 31个谐波

■ 信号的对称性与傅里叶系数的关系

信号为 t 的偶函数

$$f(-t) = f(t)$$

$f(t)\cos n\Omega t$ 为偶函数（偶 $\times$ 偶 $\rightarrow$ 偶）

$f(t)\sin n\Omega t$ 为奇函数（偶 $\times$ 奇 $\rightarrow$ 奇）

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\Omega t dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\Omega t dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\Omega t dt = 0$$

此时，傅里叶级数不含正弦项 $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\Omega t$

信号为 t 的奇函数

$$f(-t) = -f(t)$$

$f(t)\cos n\Omega t$ 为奇函数（奇 $\times$ 偶 $\rightarrow$ 奇）

$f(t)\sin n\Omega t$ 为偶函数（奇 $\times$ 奇 $\rightarrow$ 偶）

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\Omega t dt = 0 \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\Omega t dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\Omega t dt$$

此时，傅里叶级数不含直流和余弦项 $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\Omega t$

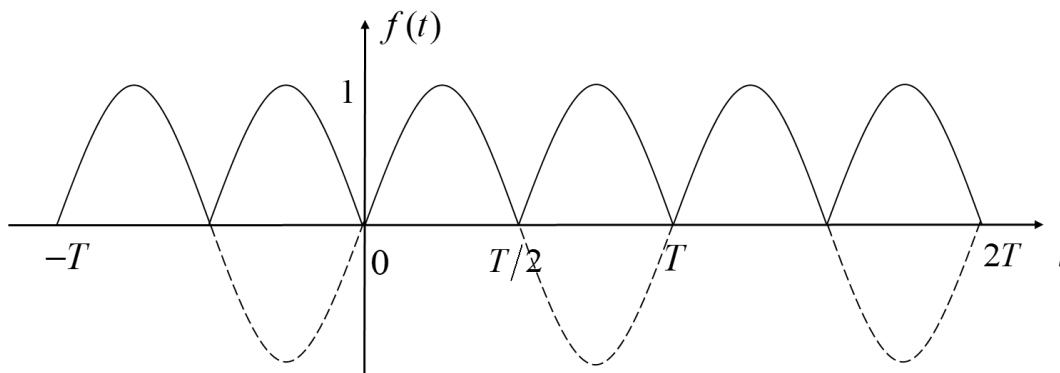
■ 信号的对称性与傅里叶系数的关系

信号为半波对称函数

$f(t) = f\left(t \pm \frac{T}{2}\right)$ 信号沿时间轴平移半个周期以后与原波形完全重合

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \Omega' = \frac{2\pi}{T/2} = \frac{4\pi}{T} = 2\Omega$$

信号实际周期为 $T/2$ ， 2Ω 为实际的基波角频率，故只含 Ω 的偶次谐波

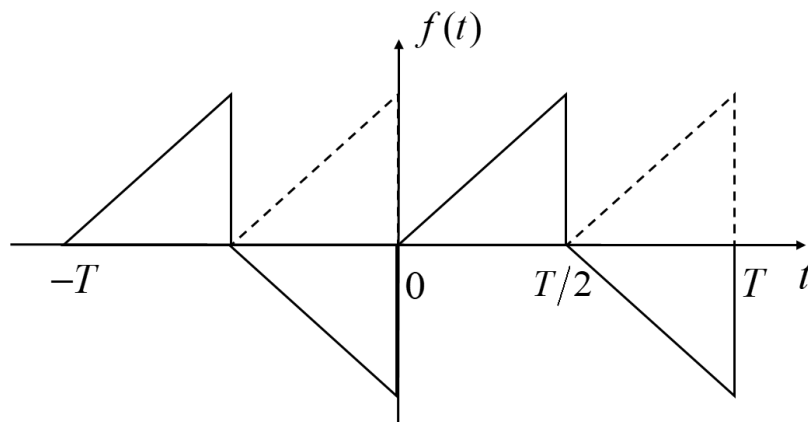


此时傅里叶级数只含偶次谐波，不含奇次谐波，又称偶谐函数。

■ 信号的对称性与傅里叶系数的关系

信号为半波镜像对称函数

$f(t) = -f\left(t \pm \frac{T}{2}\right)$ 信号平移半个周期以后与原波形关于横轴对称



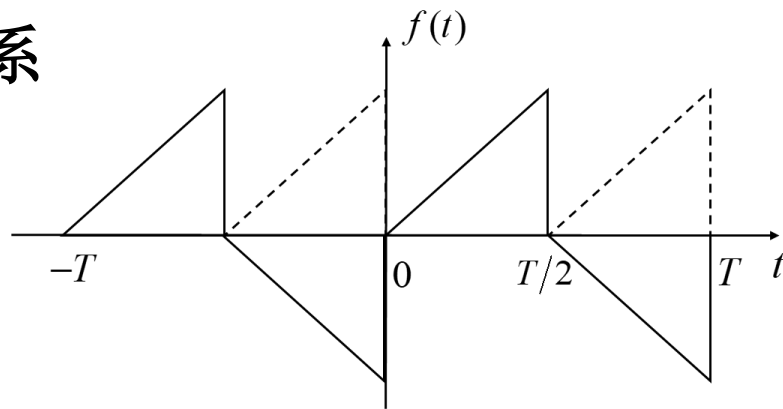
$$a_0 = a_2 = \cdots = a_{2n} = \cdots = b_0 = b_2 = \cdots = b_{2n} = \cdots = 0$$

$$a_1, a_3, \cdots, a_{2n+1}, \cdots, b_1, b_3, \cdots, b_{2n+1}, \cdots \neq 0$$

此时傅里叶级数只含奇次谐波，不含偶次谐波，又称奇谐函数。

■ 信号的对称性与傅里叶系数的关系

信号为半波镜像对称函数



区间 $(0, T)$ 内, 信号表示为 $f_0(t) - f_0(t - \frac{T}{2})$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\Omega t dt = \frac{2}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} f_0(t) \cos n\Omega t dt - \int_{\frac{T}{2}}^T f_0(t - \frac{T}{2}) \cos n\Omega t dt \right]$$

$$\text{令 } \tau = t - \frac{T}{2}, \text{ 则 } t = \tau + \frac{T}{2}, t \in (\frac{T}{2}, T) \rightarrow \tau \in (0, \frac{T}{2}), d\tau = dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} f_0(t) \cos n\Omega t dt - \int_0^{\frac{T}{2}} f_0(\tau) \cos(n\Omega \tau + n\pi) d\tau \right] = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数} \\ \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f_0(t) \cos n\Omega t dt, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

$$\text{同理: } b_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数} \\ \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f_0(t) \sin n\Omega t dt, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

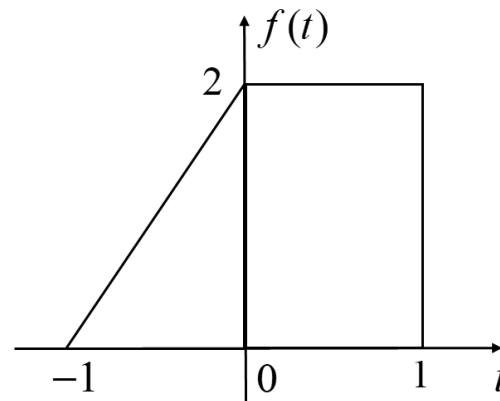
■ 信号的对称性与傅里叶系数的关系

任意信号分解为偶分量和奇分量之和

$$f(t) = \underbrace{\frac{f(t) + f(-t)}{2}}_{\text{偶分量}} + \underbrace{\frac{f(t) - f(-t)}{2}}_{\text{奇分量}} = f_{ev}(t) + f_{od}(t)$$

$$\text{偶分量 } f_{ev}(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} \quad \text{奇分量 } f_{od}(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}$$

例题2 求图示函数的奇分量和偶分量。



■ 指数形式的傅里叶级数

指数形式傅里叶级数的定义

给定周期为 T 的周期信号 $f(t)$ ，当它满足狄利克雷条件时，可以表示为 $(t_0, t_0 + T)$ 上完备正交函数集合 $\{e^{jn\Omega t}\} (n \rightarrow \infty, \Omega = \frac{2\pi}{T})$ 中各个函数的线性组合，即

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t}$$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

指数形式傅里叶级数中出现了负频率，负频率没有实际的物理意义，它的出现完全是采用复指数信号集合表示周期信号的结果，是数学分析的过程，当正负频率合并在一起时才能合成实际的频率分量。

■ 指数形式的傅里叶级数

指数形式与三角形式傅里叶系数的关系

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\Omega t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\Omega t dt$$

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\Omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\Omega t dt - j \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\Omega t dt \\ &= \frac{1}{2} (a_n - jb_n) \end{aligned}$$

$$F_{-n} = \frac{1}{2} (a_{-n} - jb_{-n}) = \frac{1}{2} (a_n + jb_n) \quad \begin{cases} a_n = F_n + F_{-n} \\ b_n = j(F_n - F_{-n}) \end{cases}$$

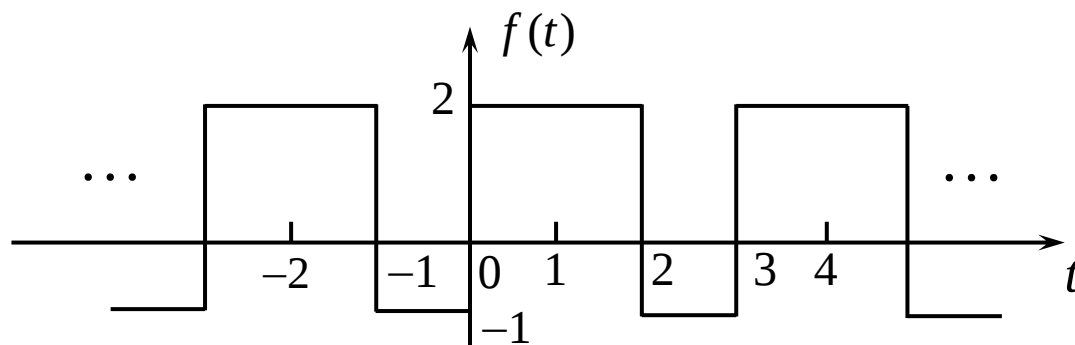
$$|F_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2} A_n \quad |F_{-n}| = |F_n| \quad n \text{ 的偶函数}$$

$$\angle F_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n} = \varphi_n \quad \varphi_{-n} = -\varphi_n \quad n \text{ 的奇函数}$$

$$F_n = \frac{1}{2} A_n e^{j\varphi_n}$$

例题3

求如图所示周期信号的指数形式的傅里叶级数。



3.2 连续时间周期信号的频谱分析

周期信号的频谱

周期信号频谱的特点

■ 周期信号的频谱

频谱的概念

为直观表示信号各频率分量的分布及其所占比重，引入频谱的概念。

$$\begin{array}{cc} \underline{A_n, |F_n| \sim n\Omega} & \underline{\varphi_n \sim n\Omega} \\ \text{幅频特性} & \text{相频特性} \end{array}$$

频谱 { 幅度谱（幅频特性曲线）：幅度 A_n ($|F_n|$)随离散频率 $n\Omega$ 变化的图
相位谱（相频特性曲线）：相位 φ_n 随离散频率 $n\Omega$ 变化的图

■ 周期信号的频谱

单边频谱与双边频谱

- 单边频谱：信号分解为三角级数时可以用单边频谱表示，此时频谱中只有正频率分量。

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n)$$

- 双边频谱：信号分解为指数型级数时可以用双边频谱表示，此时频谱中同时有正、负频率分量。

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t}$$

- 单边频谱和双边频谱之间的关系 $F_n = \frac{1}{2} A_n e^{j\varphi_n}$

单边幅度谱除直流分量之外幅度减半且关于纵轴偶对称即可得到双边幅度谱，单边相位谱关于纵轴奇对称即可得到双边相位谱。

■ 周期信号的频谱

作频谱图的说明

- 作单边频谱图时，需注意周期信号各分量必须是余弦cos函数相加的形式，若所给信号里有sin形式的分量，则须通过诱导公式转化成cos函数的形式；若有符号为负的cos项，则需要通过三角公式转化为正项的cos函数进行分析；
- 当指数形式的傅里叶级数系数为非零实数时，相位只有0（对应正系数）和 π （对应负系数）两种情况。此时幅度谱和相位谱可以用同一个频谱图表示，正谱线代表0相位，负谱线代表 π 相位。

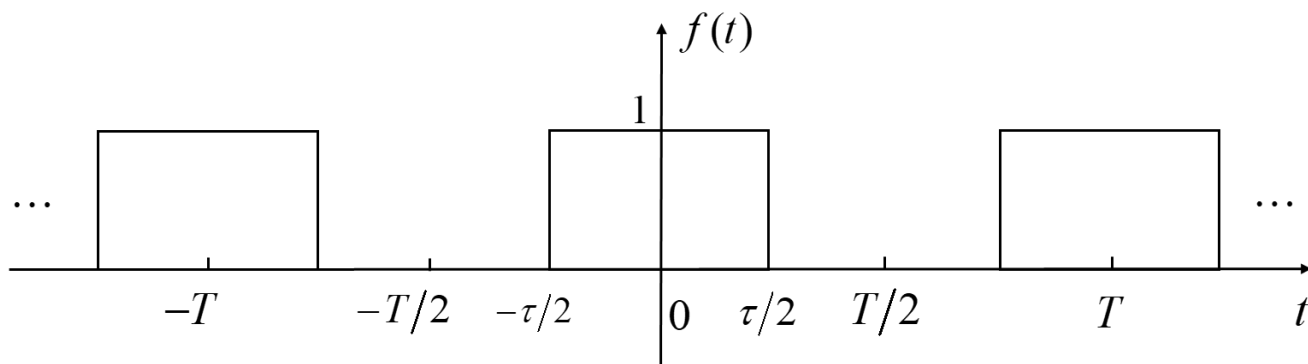
例题4 已知某一周期信号的傅里叶级数展开式为

$$f(t) = 1 - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{6}\right)$$

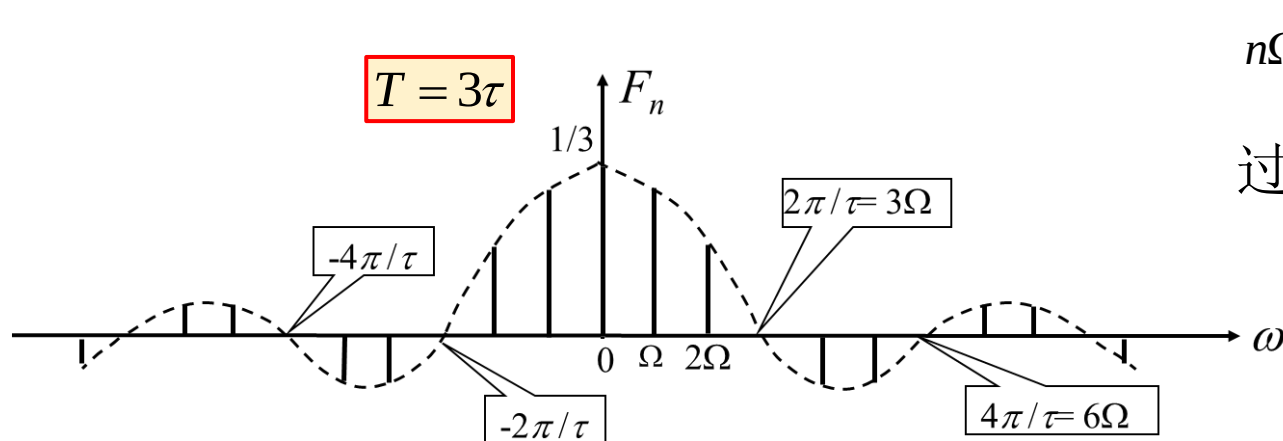
试求基波角频率 Ω ，谐波的次数，并作出该信号的单边谱和双边谱。

■ 周期信号频谱的特点

以周期矩形脉冲信号为例讨论周期信号频谱的特点。



$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-jn\Omega t} dt = \frac{\tau}{T} \text{Sa}\left(n\Omega \frac{\tau}{2}\right)$$



$$n\Omega \frac{\tau}{2} = \pm m\pi (m = 1, 2, \dots)$$

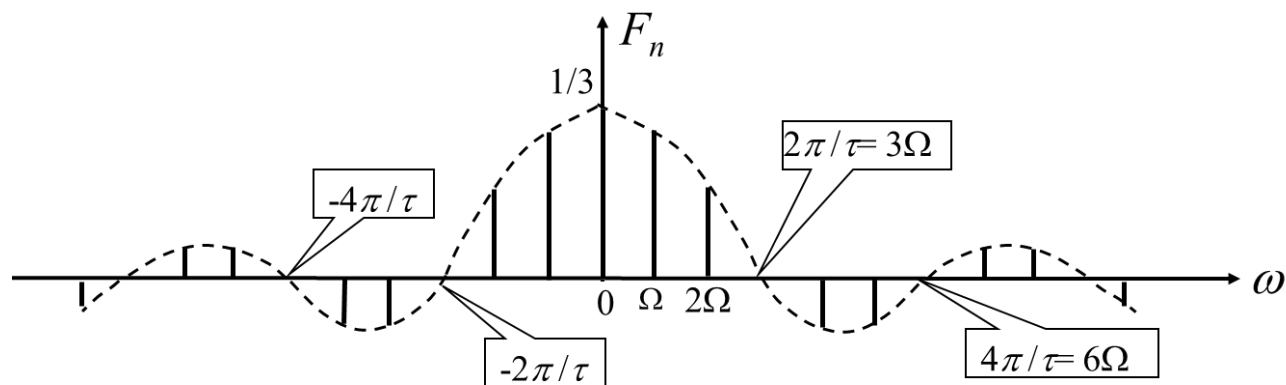
$$\text{过零点: } n\Omega = \pm \frac{2m\pi}{\tau}$$

$$= \pm \frac{2m\pi}{T/3} = m \cdot 3\Omega$$

$$\text{过零点: } \pm 3\Omega, \pm 6\Omega, \dots$$

■ 周期信号频谱的特点

以周期矩形脉冲信号为例讨论周期信号频谱的特点。

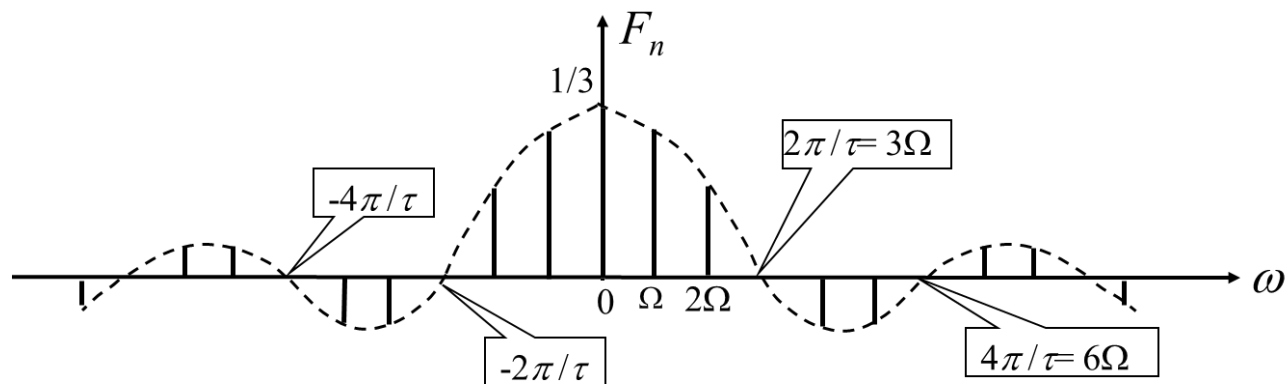


- **离散性：**谱线只出现在 $\omega = 0, \Omega, 2\Omega, 3\Omega, \dots$ 的离散频率点上，谱线最小间隔为 Ω ，为离散谱；
- **谐波性：**周期信号所含频率分量的频率均为信号角频率 Ω ，即基波角频率的整数倍；
- **收敛性：**谐波分量幅度随着 n 的增大而减小， $n \rightarrow \infty$ 时， $F_n \rightarrow 0$ 。

其他周期信号的频谱也具备这三个特点。

■ 周期信号频谱的特点

周期信号的有效频带宽度（带宽）



➤ 有效频带宽度：离散频谱的第一过零点带宽，有两种表示形式：

$$B_{\omega} = \frac{2\pi}{\tau} (\text{rad/s}) \quad B_f = \frac{1}{\tau} (\text{Hz})$$

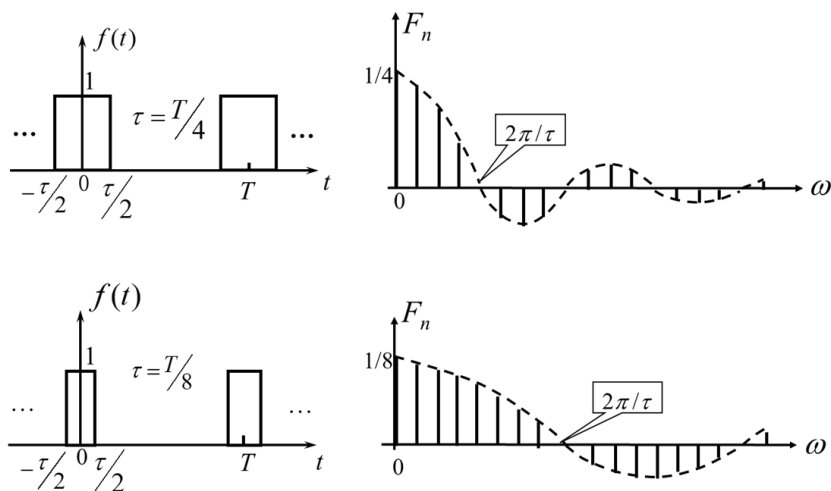
信号的有效带宽内集中了信号绝大部分的谐波能量，若丢失有效带宽之外的谐波成分，对信号影响不明显；脉冲时域宽度越小，传输信号速率越高，但同时所需带宽越大，是一对矛盾。

■ 周期信号频谱的特点

脉冲宽度与信号周期对频谱的影响

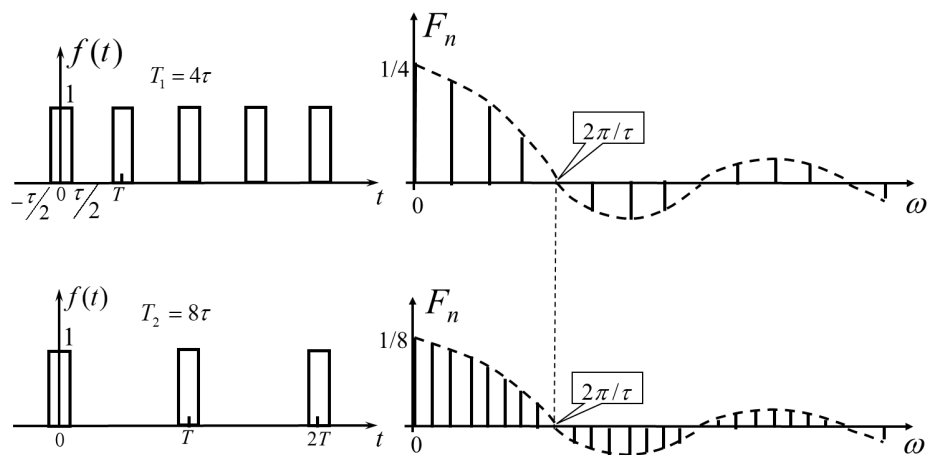
➤ 周期相同、脉冲宽度不同

周期相同，谱线的间隔相同；
脉冲宽度越窄，则第一个过零点
频率越高，信号的带宽变宽，同
时各分量幅度减小。



➤ 脉冲宽度相同、周期不同

脉冲宽度相同，第一过零点
频率相同，信号的带宽相同；周
期变大，则 Ω 变小，谱线间隔变
密集，同时各分量幅度减小。



■ 周期信号频谱的特点

矩形周期信号频谱参数：总结

谱线间隔 $\Omega = \frac{2\pi}{T} (\text{rad/s})$ $f = \frac{1}{T} (\text{Hz})$ 谱线间隔由信号周期决定。

有效带宽 $B_\omega = \frac{2\pi}{\tau} (\text{rad/s})$ $B_f = \frac{1}{\tau} (\text{Hz})$ 带宽由脉冲的宽度决定。

➤ 注：周期无限大时，谱线无限密集，幅度无限小，需用密度描述。

例题5

已知周期矩形脉冲信号，其脉冲宽度为2ms，周期为10ms，求该信号频谱的谱线间隔和有效频带宽度。

■ 周期信号频谱的特点

周期信号的功率谱

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n) \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t}$$

➤ 周期信号的功率

$$P = \underbrace{\left(\frac{A_0}{2}\right)^2}_{\text{直流功率}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^2}{2}}_{\text{谐波功率之和}} \quad \xrightarrow{|F_n| = \frac{A_n}{2}} \quad P = |F_0|^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |F_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$$

三角级数 指数级数

上述两个功率表达式称为功率信号的帕斯瓦尔(Parseval)恒等式，说明了周期信号平均功率和信号频谱中各分量功率的关系。

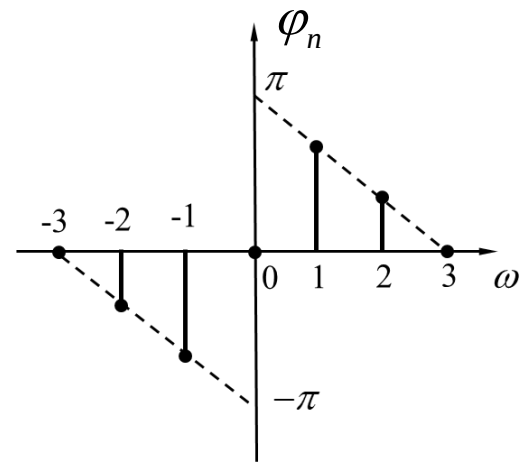
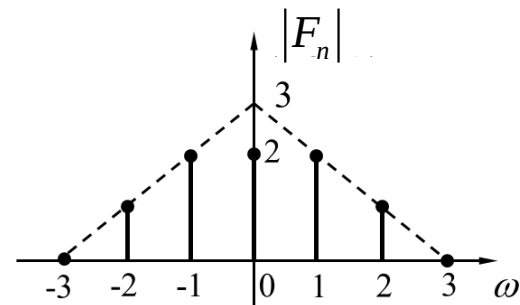
➤ 周期信号功率谱定义

对于不同的频率分量， $|F_n|^2$ 或 $\frac{A_n^2}{2}$ 随离散频率 $n\Omega$ 分布的特性称为周期信号的功率谱。

例题6

已知周期信号 $f(t)$ 的双边频谱如图所示。

- 1) 写出 $f(t)$ 指数及三角形式的傅里叶级数；
- 2) 画出 $f(t)$ 的功率谱，并求解信号的功率。



3.3 连续时间信号的傅里叶变换

傅里叶变换的定义

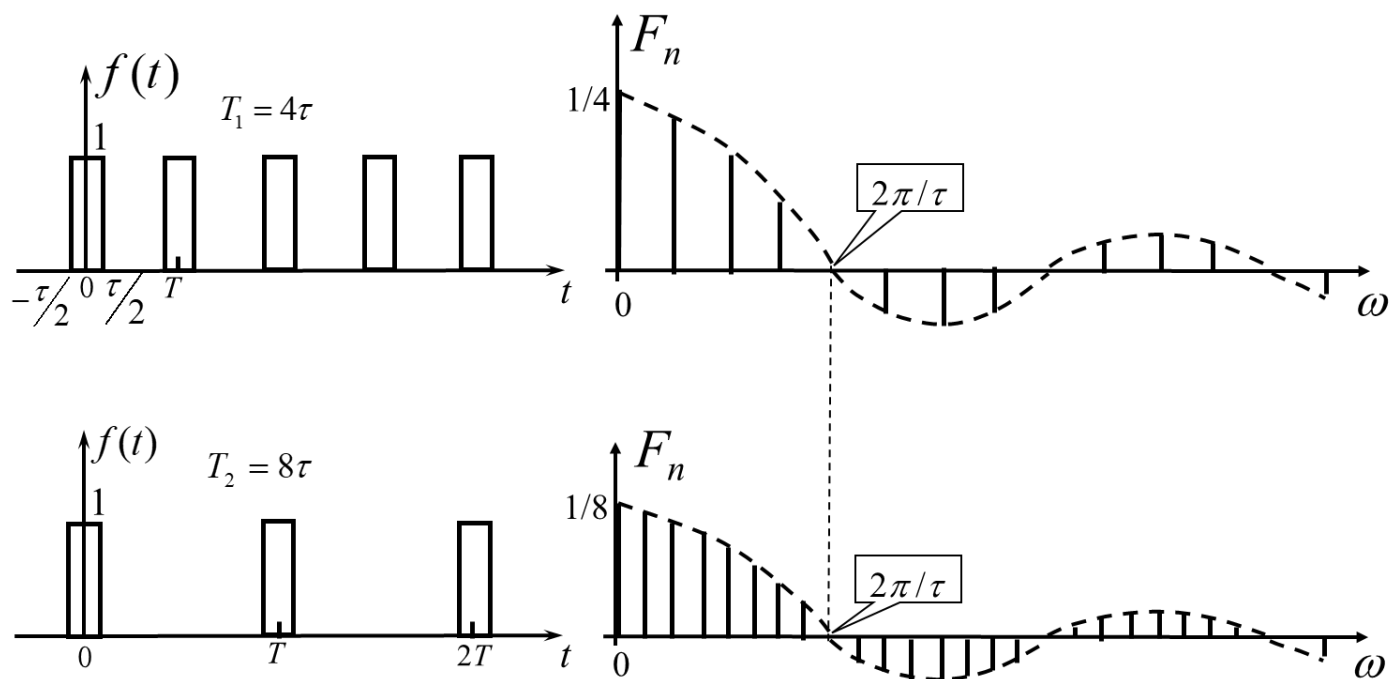
频谱密度函数

常见信号的傅里叶变换

■ 傅里叶变换的定义

频谱密度的引入

- 对周期信号而言，信号周期 T 越大，频谱谱线越密集，幅度减小；信号周期 T 无限大时，周期信号变为非周期信号，谱线无限密集，幅度无穷小，离散谱过渡为连续谱，需改用密度描述频谱特性。



■ 傅里叶变换的定义

从傅里叶级数到傅里叶变换

傅里叶正变换

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

$T \rightarrow \infty$  $\Omega \rightarrow d\omega$ 频谱间隔无限密集, 变为无穷小量

$n\Omega \rightarrow \omega$ 离散频率 $\rightarrow$ 连续频率

频谱密度: 单位频率的信号频谱值

$$F(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} F_n / f = \lim_{T \rightarrow \infty} F_n T = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad \boxed{F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt}$$

■ 傅里叶变换的定义

从傅里叶级数到傅里叶变换

傅里叶反变换

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n T e^{jn\Omega t}$$

$T \rightarrow \infty$  $\Omega \rightarrow d\omega$ 频谱间隔无限密集, 变为无穷小量

$n\Omega \rightarrow \omega$ 离散频率 $\rightarrow$ 连续频率

$$\lim_{T \rightarrow \infty} F_n T = F(j\omega)$$

$$\frac{1}{T} = \frac{\Omega}{2\pi} \rightarrow \frac{d\omega}{2\pi}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

■ 傅里叶变换的定义

傅里叶变换对 傅里叶变换对 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$

➤ 傅里叶正变换 $F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$ $F(j\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$

➤ 傅里叶反变换 $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$ $f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(j\omega)]$

傅里叶变换存在的充分条件

信号满足绝对可积条件: $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty$

常用结论 $F(0) = F(j\omega)|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \Big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$

$$f(0) = f(t)|_{t=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \Big|_{t=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) d\omega$$

■ 频谱密度函数

频谱密度函数 $F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$

信号为实函数: $F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \underline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt} - j \underline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt}$
 $= R(\omega) + jX(\omega)$ 频谱为复函数, 含**实部**和**虚部**

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt \quad R(-\omega) = R(\omega) \quad \omega \text{ 的偶函数}$$
$$X(\omega) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt \quad X(-\omega) = -X(\omega) \quad \omega \text{ 的奇函数}$$

$$F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

$$|F(j\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)} \quad |F(-\omega)| = |F(\omega)| \quad \omega \text{ 的偶函数} \quad \text{幅频特性}$$
$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{X(\omega)}{R(\omega)} \quad \varphi(-\omega) = -\varphi(\omega) \quad \omega \text{ 的奇函数} \quad \text{相频特性}$$

■ 频谱密度函数

傅里叶级数

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t}$$

$T \rightarrow \infty$


傅里叶变换

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

离散频谱

$$F_n = \frac{1}{2} (a_n - jb_n)$$

$$|F_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2} A_n$$

$$\varphi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n}$$

幅频特性

相频特性

频谱密度

$$F(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

$$|F(j\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)}$$

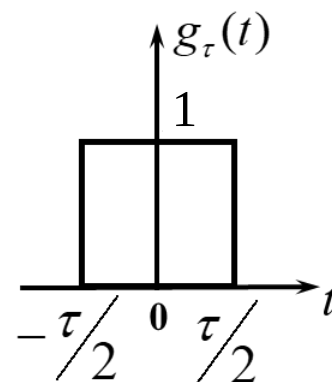
$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{X(\omega)}{R(\omega)}$$

■ 常见信号的傅里叶变换

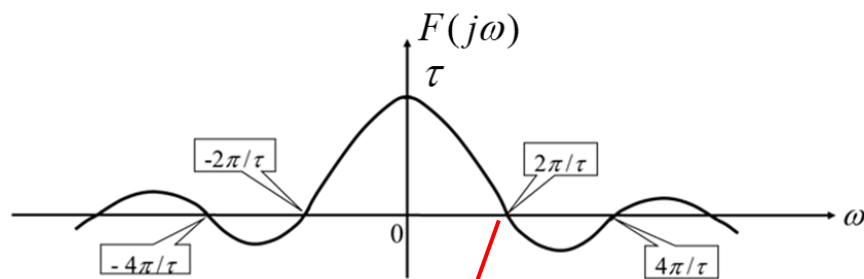
矩形脉冲（门函数）

$$g_{\tau}(t) = \left[\varepsilon\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \varepsilon\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

$$g_{\tau}(t) \leftrightarrow \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$



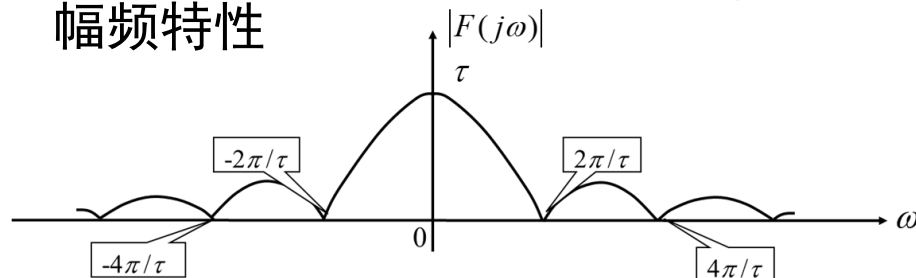
实频谱：幅度、相位合二为一



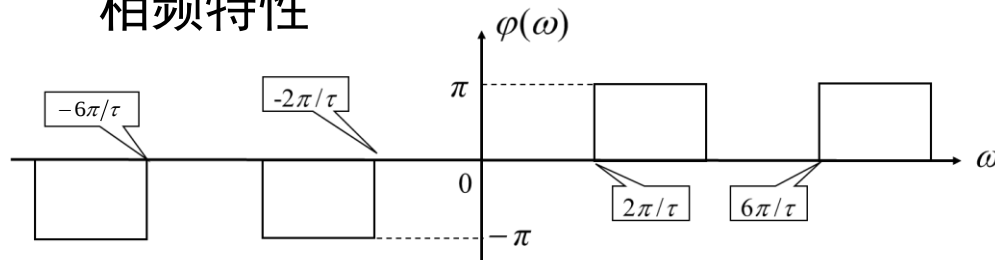
有效带宽

$$B_{\omega} = \frac{2\pi}{\tau} \text{ (rad/s)} \quad B_f = \frac{1}{\tau} \text{ (Hz)}$$

幅频特性



相频特性

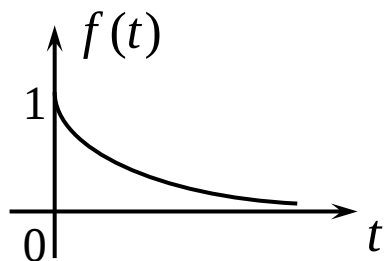


时域有限信号，频域上无限展宽

■ 常见信号的傅里叶变换

单边指数信号

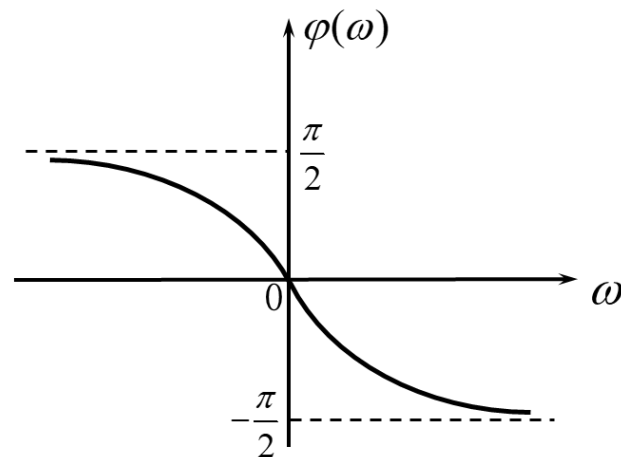
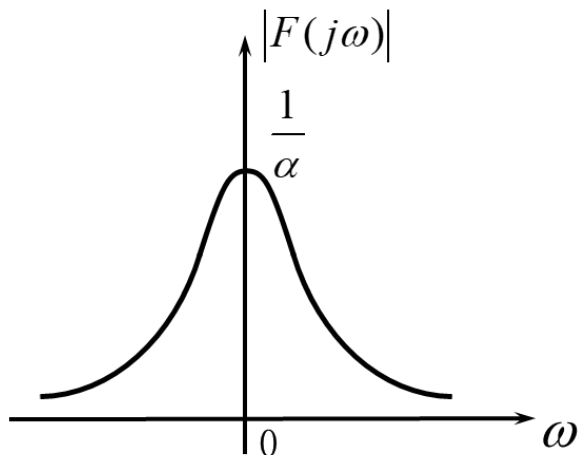
$$f(t) = e^{-\alpha t} \varepsilon(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0)$$



$$e^{-\alpha t} \varepsilon(t) \quad (\alpha > 0) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

幅频特性 $|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$

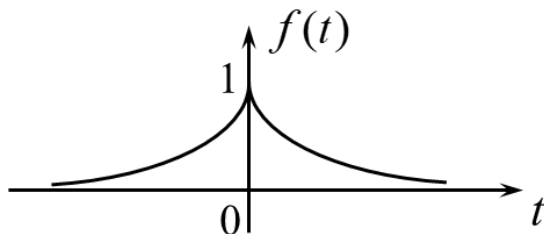
相频特性 $\varphi(\omega) = -\arctan \frac{\omega}{\alpha}$



■ 常见信号的傅里叶变换

偶双边指数信号

$$f(t) = e^{-\alpha|t|} = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t > 0 \\ e^{\alpha t} & t < 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0)$$

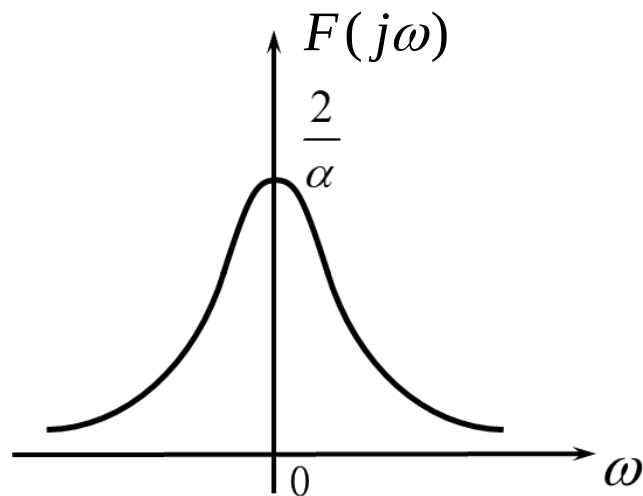


$$e^{-\alpha|t|} \quad (\alpha > 0) \leftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

频谱为恒正的实频谱，相位恒为0

幅频特性 $|F(j\omega)| = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$

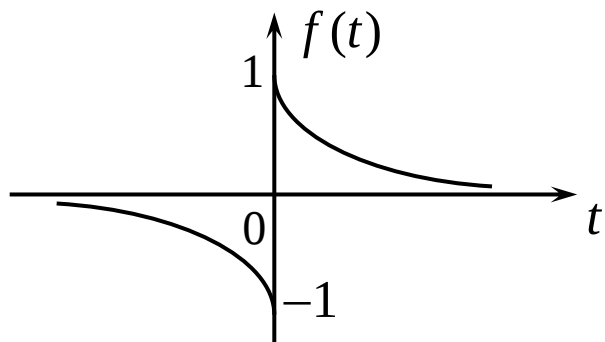
相频特性 $\varphi(\omega) = 0$



■ 常见信号的傅里叶变换

奇双边指数信号

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t > 0 \\ -e^{\alpha t} & t < 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0)$$

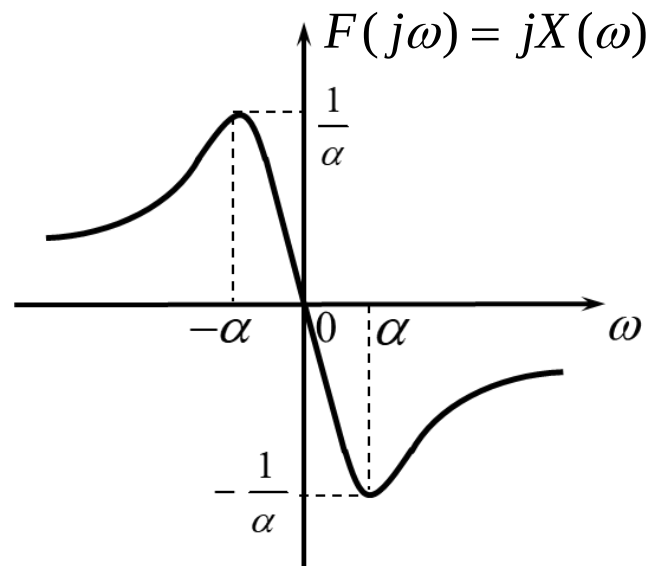


$$\begin{cases} e^{-\alpha t} & t > 0 \\ -e^{\alpha t} & t < 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0) \leftrightarrow \frac{-j2\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

频谱为虚频谱

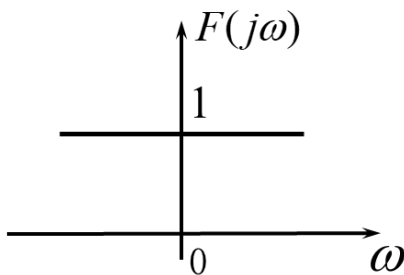
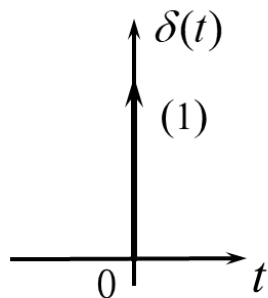
幅频特性 $|F(j\omega)| = \frac{2|\omega|}{\alpha^2 + \omega^2}$

相频特性 $\varphi(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \omega < 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \omega > 0 \end{cases}$



■ 常见信号的傅里叶变换

冲激信号及其导数

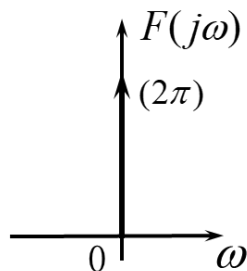
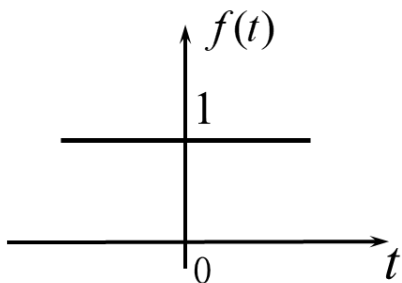


$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$\delta'(t) \leftrightarrow j\omega$$

$$\delta^{(n)}(t) \leftrightarrow (j\omega)^n$$

单位直流信号 $f(t)=1$



$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

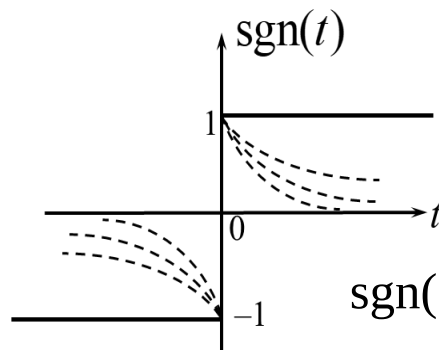
$$A \leftrightarrow 2\pi A\delta(\omega)$$

- 冲激信号和常数的时、频特性存在对称性

■ 常见信号的傅里叶变换

符号函数

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



$$\text{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

$$\text{sgn}(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} f_\alpha(t)$$

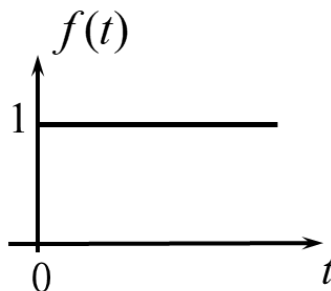
$$f_\alpha(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t > 0 \\ -e^{\alpha t} & t < 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0) \leftrightarrow \frac{-j2\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$\text{sgn}(t) \leftrightarrow F(j\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{-j2\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{2}{j\omega}$$

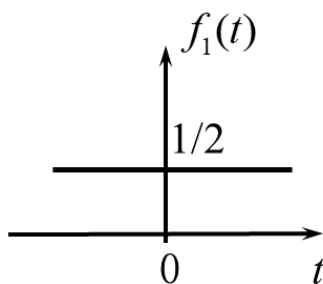
阶跃函数

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \varepsilon(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{sgn}(t)$$

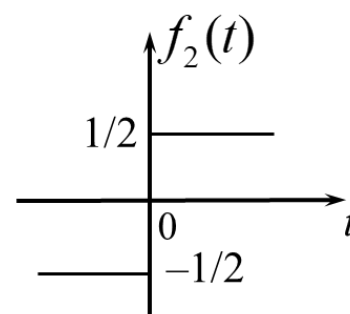
$$\varepsilon(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$



=



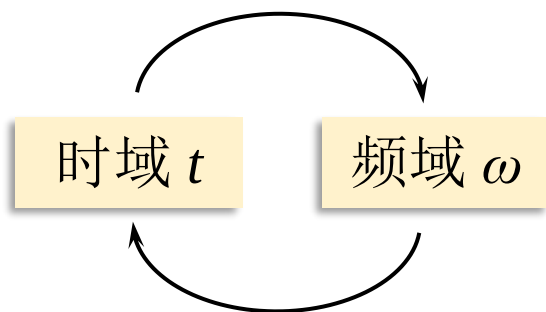
+



■ 总结

傅里叶正变换

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$



$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

傅里叶反变换

- 门函数 $g_\tau(t) \leftrightarrow \tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
- 单边指数信号 $e^{-\alpha t}\varepsilon(t) (\alpha > 0) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha + j\omega}$
- 偶双边指数信号 $e^{-\alpha|t|} (\alpha > 0) \leftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$
- 奇双边指数信号
$$\begin{cases} e^{-\alpha t} & t > 0 \\ -e^{\alpha t} & t < 0 \end{cases} (\alpha > 0) \leftrightarrow \frac{-j2\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$
- 冲激信号及其导数
$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \quad \delta'(t) \leftrightarrow j\omega \quad \delta^{(n)}(t) \leftrightarrow (j\omega)^n$$
- 直流信号 $1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$
- 符号函数 $\text{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$
- 阶跃函数 $\varepsilon(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$

3.4 傅里叶变换的性质

线性性质

奇偶性质

时移性质

频移性质

尺度变换性质

对称性（互易性）

时域卷积性质

频域卷积性质

时域微分性质

时域积分性质

频域微分性质

频域积分性质

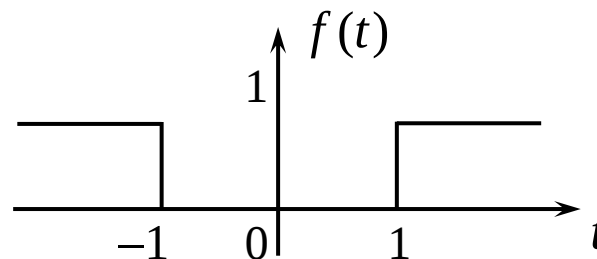
能量定理

■ 线性性质

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega), \quad f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega) \quad af_1(t) + bf_2(t) \leftrightarrow aF_1(j\omega) + bF_2(j\omega)$$

线性性质是傅里叶变换最基本的性质，说明傅里叶变换是线性变换。

例题7 求图示信号 $f(t)$ 的傅里叶变换。



■ 奇偶性

$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, 则: $f(-t) \leftrightarrow F(-j\omega)$ 研究时、频域的奇偶虚实关系。

➤ 对于实信号 $f(t)$ $f(-t) \leftrightarrow F(-j\omega) = F^*(j\omega)$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt}_{R(\omega)} - j \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt}_{X(\omega)} = R(\omega) + jX(\omega)$$

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt \quad R(-\omega) = R(\omega) \quad \omega \text{ 的偶函数}$$

$$X(\omega) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt \quad X(-\omega) = -X(\omega) \quad \omega \text{ 的奇函数}$$

$f(t) \sim$ 实函数、偶函数



$F(j\omega) \sim$ 实函数、偶函数

$$X(\omega) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt = 0 \quad F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt = R(\omega)$$

$f(t) \sim$ 实函数、奇函数



$F(j\omega) \sim$ 虚函数、奇函数

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt = 0 \quad F(j\omega) = -j \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt = jX(\omega)$$

■ 奇偶性

➤ 对于虚信号 $f(t) = jg(t)$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} jg(t)e^{-j\omega t} dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \sin \omega t dt}_{\text{red underline}} + j \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cos \omega t dt}_{\text{blue underline}} = \underline{R(\omega)} + j\underline{X(\omega)}$$

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \sin \omega t dt \quad R(-\omega) = -R(\omega) \quad \omega \text{ 的奇函数}$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cos \omega t dt \quad X(-\omega) = X(\omega) \quad \omega \text{ 的偶函数}$$

$f(t) \sim$ 虚函数、偶函数



$F(j\omega) \sim$ 虚函数、偶函数

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \sin \omega t dt = 0$$

$$F(j\omega) = j \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cos \omega t dt = jX(\omega)$$

$f(t) \sim$ 虚函数、奇函数



$F(j\omega) \sim$ 实函数、奇函数

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cos \omega t dt = 0$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \sin \omega t dt = R(\omega)$$

■ 奇偶性

➤ 实信号奇、偶分量的频谱

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega) \quad \begin{cases} f_{ev}(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} \leftrightarrow \operatorname{Re}[F(j\omega)] = R(\omega) \\ f_{od}(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2} \leftrightarrow j \operatorname{Im}[F(j\omega)] = jX(\omega) \end{cases}$$

$f(-t) \leftrightarrow F(-j\omega) = F^*(j\omega)$

记忆口诀：时域偶分量对应频域实部，时域奇分量对应频域虚部乘 j 。

$$R(\omega) = \frac{1}{2} [\underline{F(j\omega)} + \underline{F^*(j\omega)}] \leftrightarrow \frac{1}{2} [\underline{f(t)} + \underline{f(-t)}] = f_{ev}(t)$$
$$jX(\omega) = \frac{1}{2} [\underline{F(j\omega)} - \underline{F^*(j\omega)}] \leftrightarrow \frac{1}{2} [\underline{f(t)} - \underline{f(-t)}] = f_{od}(t)$$

$$f_{ev}(t) \leftrightarrow \operatorname{Re}[F(j\omega)] = R(\omega) \quad f_{od}(t) \leftrightarrow j \operatorname{Im}[F(j\omega)] = jX(\omega)$$

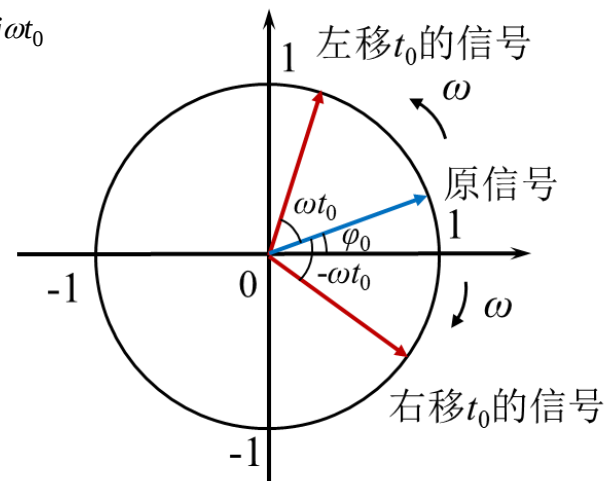
■ 时移性质

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega), \text{ 则: } f(t \pm t_0) \leftrightarrow F(j\omega)e^{\pm j\omega t_0}$$

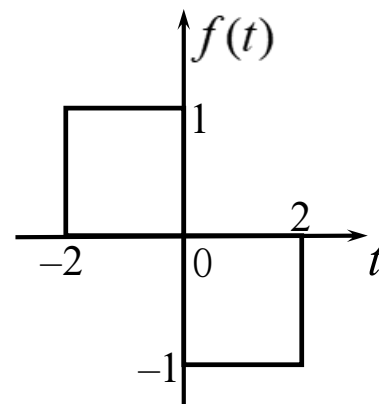
信号时移引起频域**附加线性相位**，幅度不变。

信号左移 t_0 : $f(t) \rightarrow f(t+t_0)$ ，相位超前 ωt_0

信号右移 t_0 : $f(t) \rightarrow f(t-t_0)$ ，相位滞后 ωt_0



例题8 求图示信号 $f(t)$ 的傅里叶变换。



■ 频移性质

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega), \text{ 则: } f(t)e^{\pm j\omega_0 t} \leftrightarrow F[j(\omega \mp \omega_0)]$$

$$f(t) \rightarrow f(t)e^{j\omega_0 t} \quad F(j\omega) \rightarrow F[j(\omega - \omega_0)] \quad \text{信号频谱右移 } \omega_0$$

$$f(t) \rightarrow f(t)e^{-j\omega_0 t} \quad F(j\omega) \rightarrow F[j(\omega + \omega_0)] \quad \text{信号频谱左移 } \omega_0$$

例题9 求信号 $e^{\pm j\omega_0 t}$, $\cos \omega_0 t$, $\sin \omega_0 t$ 的傅里叶变换。

$$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0), \quad e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$$

$$\begin{cases} \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}] \\ \sin \omega_0 t = \frac{1}{2j} [e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}] \end{cases}$$

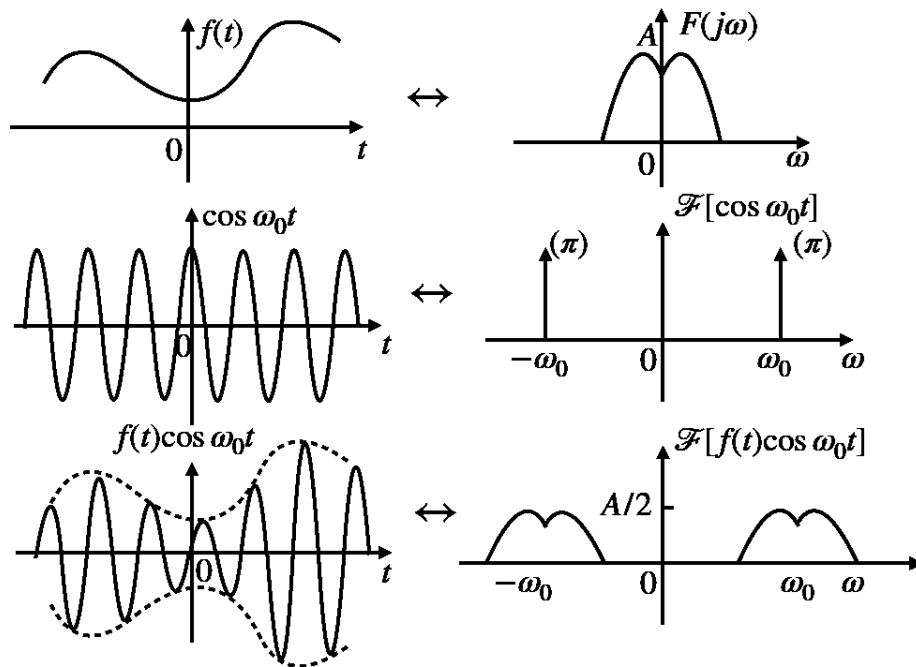
$$\begin{aligned} \cos \omega_0 t &\leftrightarrow \pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \\ \sin \omega_0 t &\leftrightarrow j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] \end{aligned}$$

例题10 求解信号 $f(t)\cos\omega_0t$ 和 $f(t)\sin\omega_0t$ 的傅里叶变换。

调制特性及已调信号的频谱

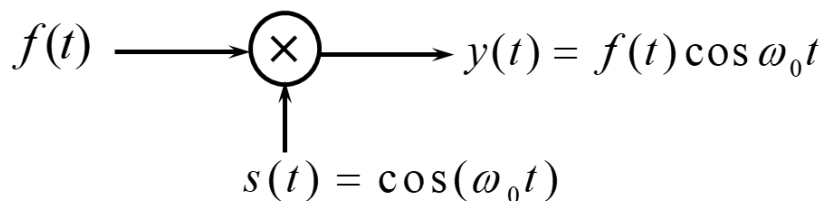
$$f(t)\cos\omega_0t = f(t) \cdot \frac{1}{2} [e^{j\omega_0t} + e^{-j\omega_0t}]$$

$$\leftrightarrow \frac{1}{2} \{ F[j(\omega + \omega_0)] + F[j(\omega - \omega_0)] \}$$



时域调制

频域频谱搬移



$f(t)$: 调制信号 (含信息)
 $s(t)$: 载波信号 (单一高频率的信号)
 $y(t)$: 已调信号

■ 尺度变换性质

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega), \text{ 则: } f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{\omega}{a}\right), a \neq 0, a \in R$$

若 $a = -1$, 则: $f(-t) \leftrightarrow F(-j\omega)$, 称为时间倒置定理

记忆口诀:

- $a > 1$, 时域压缩, 频域展宽, 幅度变小;
- $0 < a < 1$, 时域展宽, 频域压缩, 幅度变大;
- 若 $a < 0$, 还需要时域频域同时翻转。

矛盾: 时域压缩可以提高传输速度, 但所需带宽也相应提高

时移、频移、尺度变换性质经常综合在一起出题。需注意: 时域内对单独的 t 变化, 频域内对单独的 ω 变化。

$$e^{j\omega_0 t} f(at+b) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{\omega-\omega_0}{a}\right) e^{j\frac{\omega-\omega_0}{a}b}$$

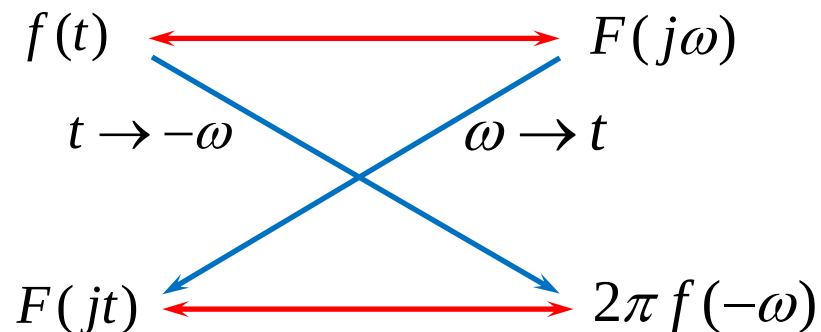
例题11 已知 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, 求 $e^{-j4t} f(2-3t)$ 的傅里叶变换。

例题12 求 $f(t) = 3e^{-(3+2j)t} \varepsilon(t+1)$ 的傅里叶变换。

■ 对称性

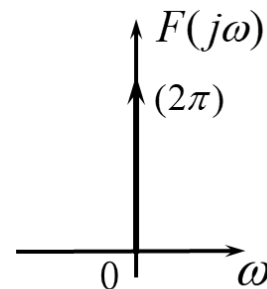
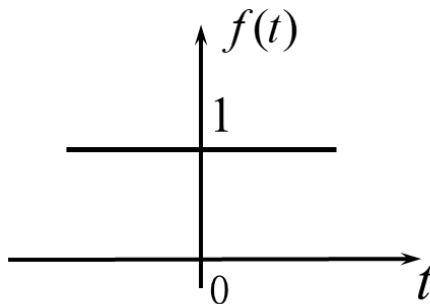
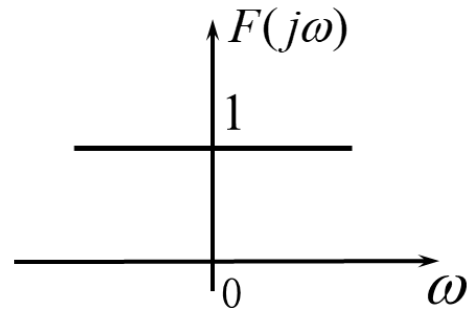
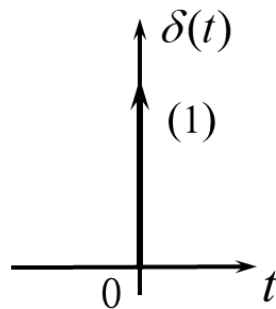
$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

$$\text{则: } F(jt) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

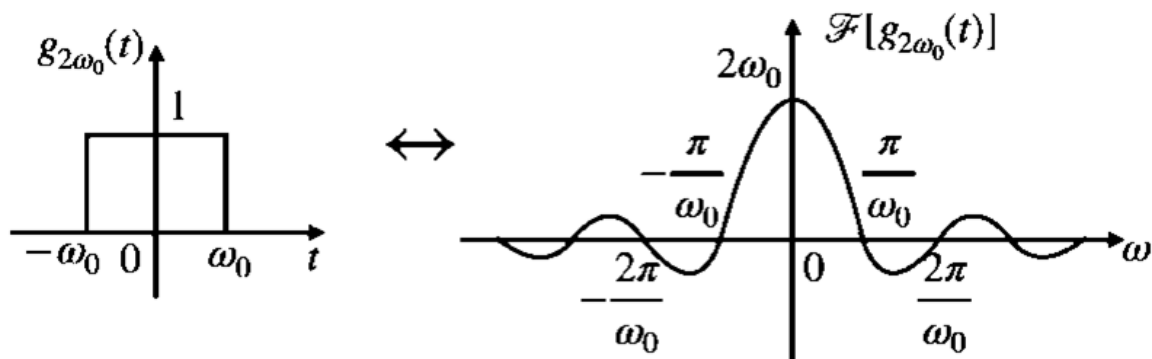


$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

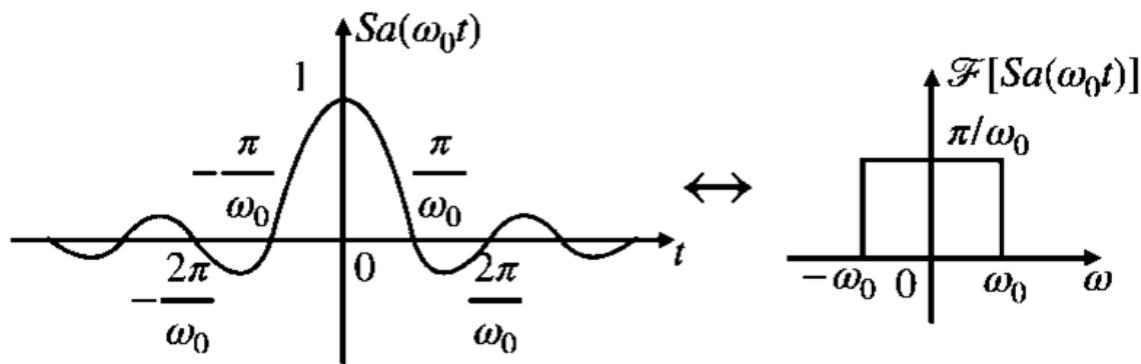
$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$



例题13 求信号 $f(t) = \text{Sa}(\omega_0 t) = \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 t}$ 的傅里叶变换。



$$\text{Sa}(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{\pi}{\omega_0} g_{2\omega_0}(\omega)$$



$$\frac{\sin \omega_0 t}{\pi t} \leftrightarrow g_{2\omega_0}(\omega)$$

例题14 求频谱 $F(j\omega) = 2\pi e^{2\omega} \varepsilon(-\omega)$ 的傅里叶反变换。

例题15 求信号 $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ 的傅里叶变换。

■ 对称性

傅里叶变换时频对称性总结

时域	频域	对应变换
周期、连续信号	离散、非周期频谱	连续傅里叶级数
非周期、连续信号	连续、非周期频谱	连续傅里叶变换
周期、离散信号	离散、周期频谱	离散傅里叶级数
非周期、离散信号	连续、周期频谱	离散时间傅里叶变换

周期  离散

非周期  连续

有限  无限

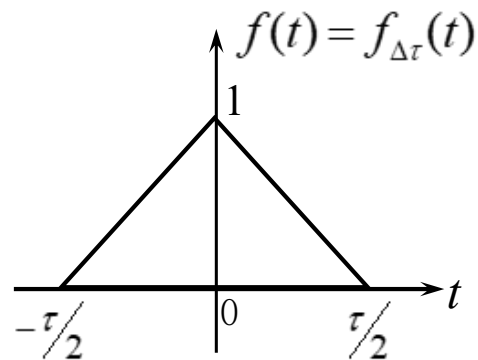
■ 时域卷积性质

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega), \quad f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega), \quad \text{则: } f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega)$$

记忆口诀：时域卷积，频域相乘。

$$e(t) \leftrightarrow E(j\omega), \quad h(t) \leftrightarrow H(j\omega) \quad \text{则: } y_{zs}(t) = e(t) * h(t) \leftrightarrow Y_{zs}(j\omega) = E(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

例题16 求图示三角波信号的傅里叶变换。

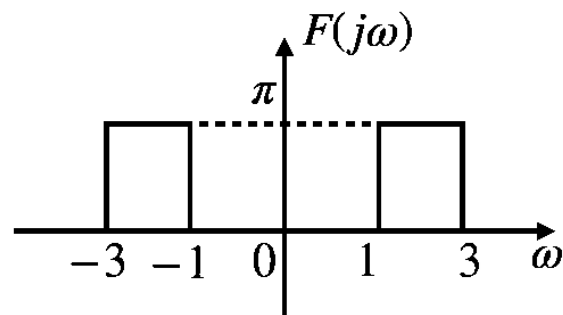


■ 频域卷积性质

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega), \quad f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega), \quad \text{则: } f_1(t) \cdot f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} [F_1(j\omega) * F_2(j\omega)]$$

记忆口诀：时域相乘，频域卷积。

例题17 求图示频谱的傅里叶反变换。



例题18 求解信号 $f(t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2$ 的傅里叶变换。

■ 时域微分性质

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega), \text{ 则: } \frac{d}{dt} f(t) \leftrightarrow j\omega F(j\omega), \frac{d^n}{dt^n} f(t) \leftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega)$$

理解: $\frac{d}{dt} f(t) = \underbrace{f(t)}_{\downarrow} * \underbrace{\delta'(t)}_{\downarrow}$

$$\underline{F(j\omega)} \cdot \underline{j\omega} = j\omega F(j\omega)$$

例题19 求解信号 $f(t) = \frac{1}{t^2}$ 的傅里叶变换。

■ 时域积分性质

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega), \text{ 则: } \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} F(j\omega) + \pi F(0)\delta(\omega)$$

$$F(0) = F(j\omega)|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \Big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$$

$$\text{理解: } \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = \underline{f(t)} * \underline{\varepsilon(t)}$$

$$\begin{array}{ccc} \updownarrow & & \updownarrow \\ \underline{F(j\omega)} \cdot \left[\underline{\pi\delta(\omega)} + \frac{1}{j\omega} \right] & = & \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{F(j\omega)}{j\omega} \end{array}$$

■ 时域积分性质的使用注意事项

求导→傅里叶变换→时域积分性质

若 $f_1(t) = f'(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)$, 则 $f(t) \leftrightarrow \frac{F_1(j\omega)}{j\omega} + \pi [\underline{f(-\infty)} + \underline{f(+\infty)}] \delta(\omega)$

$$\int_{-\infty}^t f_1(x) dx = \int_{-\infty}^t \frac{df(x)}{dx} dx = \underline{f(t)} - \underline{f(-\infty)} \leftrightarrow \frac{F_1(j\omega)}{j\omega} + \pi F_1(0) \delta(\omega)$$

$$\underline{F(j\omega)} - \underline{2\pi f(-\infty)\delta(\omega)} = \frac{F_1(j\omega)}{j\omega} + \pi \boxed{F_1(0)} \delta(\omega)$$

$$F_1(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df(x)}{dx} dx = f(+\infty) - f(-\infty)$$

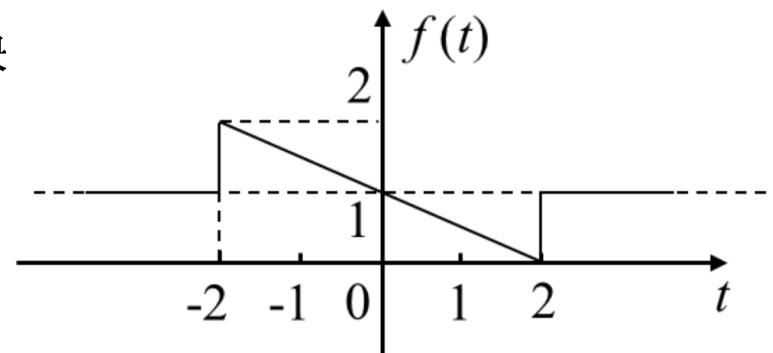
$$\therefore f(t) \leftrightarrow F(j\omega) = \frac{F_1(j\omega)}{j\omega} + \pi [f(-\infty) + f(+\infty)] \delta(\omega)$$

公式改变的根本原因：先求导后积分不一定得回原函数

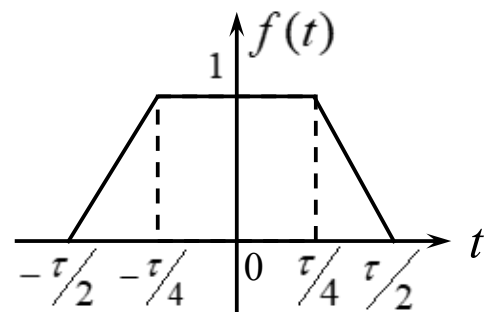
例： $\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \delta(t) \leftrightarrow 1$ $\varepsilon(-\infty) + \varepsilon(+\infty) = 0 + 1 = 1$ $\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$

若 $f^{(n)}(t) \leftrightarrow F_n(j\omega)$, 且 $f(-\infty) + f(+\infty) = 0$, 则 $f(t) \leftrightarrow \frac{F_n(j\omega)}{(j\omega)^n}$

例题20 求解图示信号的傅里叶变换



例题21 求解图示信号的傅里叶变换。



例题22 计算积分: $\int_{-\infty}^{+\infty} \text{Sa}(t) \cos(2t) dt$

■ 频域微分性质

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega), \text{ 则: } (-jt)f(t) \leftrightarrow \frac{d}{d\omega}F(j\omega), \quad (-jt)^n f(t) \leftrightarrow \frac{d^n}{d\omega^n}F(j\omega)$$

$$\text{理解: } \frac{d}{d\omega}F(j\omega) = \underbrace{F(j\omega)}_{\downarrow} * \underbrace{\delta'(\omega)}_{\downarrow}$$

$$\delta'(t) \leftrightarrow j\omega$$

$$jt \leftrightarrow 2\pi\delta'(-\omega) = -2\pi\delta'(\omega)$$

$$2\pi \cdot \underbrace{f(t)}_{\downarrow} \cdot \underbrace{\left(-\frac{jt}{2\pi}\right)}_{\downarrow} = -jt \cdot f(t) \quad -\frac{jt}{2\pi} \leftrightarrow \delta'(\omega)$$

$$\therefore (-jt)f(t) \leftrightarrow \frac{d}{d\omega}F(j\omega) \quad \text{或} \quad tf(t) \leftrightarrow j\frac{d}{d\omega}F(j\omega)$$

例题23 求解信号 $f(t) = t\varepsilon(t)$, $f(t) = te^{-\alpha t}\varepsilon(t)$ 的傅里叶变换。

■ 频域积分性质

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega), \text{ 则: } \pi f(0)\delta(t) + \frac{1}{-jt} f(t) \leftrightarrow F^{(-1)}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} F(jx)dx$$

$$f(0) = f(t)|_{t=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \Big|_{t=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) d\omega$$

理解: $\int_{-\infty}^{\omega} F(jx)dx = \underline{F(j\omega)} * \underline{\varepsilon(\omega)}$

$$\begin{aligned} & \quad \quad \quad \begin{array}{c} \Downarrow \qquad \qquad \Downarrow \\ 2\pi \cdot \underline{f(t)} \cdot \left[\frac{1}{2} \delta(t) - \frac{1}{jt} \frac{1}{2\pi} \right] \\ \hline = \pi f(0)\delta(t) + \frac{1}{-jt} f(t) \end{array} \end{aligned}$$

$$\therefore \pi f(0)\delta(t) + \frac{1}{-jt} f(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} F(jx)dx$$

$$\varepsilon(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$\pi\delta(t) + \frac{1}{jt} \leftrightarrow 2\pi\varepsilon(-\omega) = 2\pi[1 - \varepsilon(\omega)]$$

$$2\pi\delta(t) - \pi\delta(t) + \frac{1}{jt} \leftrightarrow 2\pi - 2\pi\varepsilon(\omega)$$

$$\pi\delta(t) - \frac{1}{jt} \leftrightarrow 2\pi\varepsilon(\omega)$$

$$\frac{1}{2}\delta(t) - \frac{1}{jt} \frac{1}{2\pi} \leftrightarrow \varepsilon(\omega)$$

例题24 计算积分: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2\omega}{\omega} d\omega$

■ 能量定理

➤ 非周期信号能量与频谱函数的关系

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{|F(j\omega)|^2} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(jf)|^2 df$$

➤ 能量谱密度函数 $\varepsilon(\omega) = |F(j\omega)|^2$ 能量谱取决于信号频谱的模量

例题25 求信号 $f(t) = Sa(\omega_0 t) = \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 t}$ 的能量。

例题26 求信号 $f(t) = \frac{2}{t^2 + 1}$ 的能量。

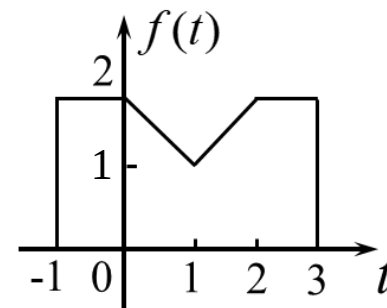
例题27 图示信号频谱函数为 $F(j\omega)$ ，不计算 $F(j\omega)$ ，试求：

1) $F(j\omega)$ 的相位函数 $\varphi(\omega)$

2) $F(0) = F(j\omega)|_{\omega=0}$

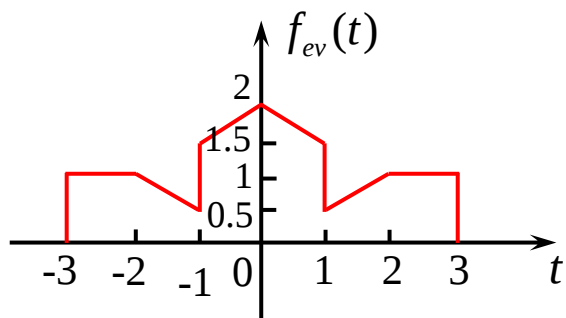
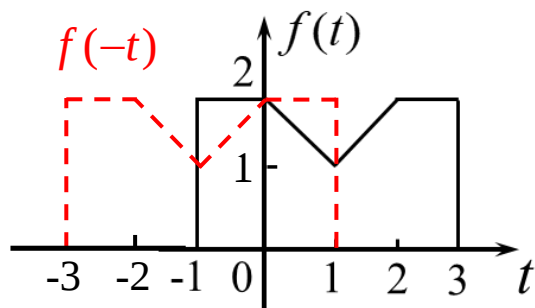
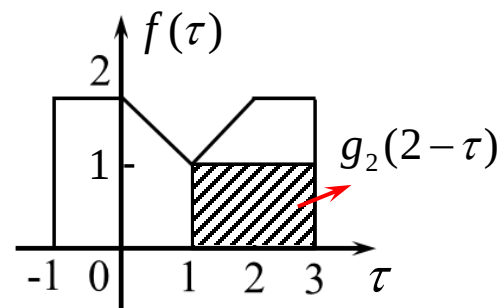
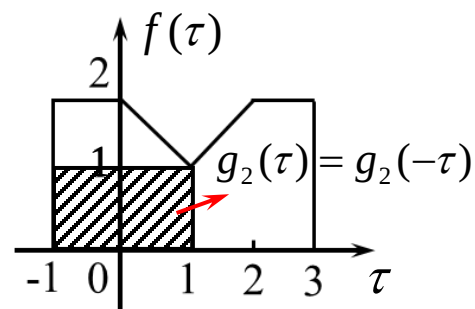
3) $\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) d\omega$

4) $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega$

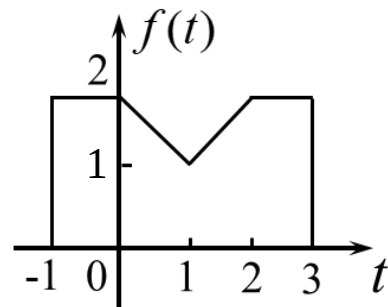


例题27 图示信号频谱函数为 $F(j\omega)$ ，不计算 $F(j\omega)$ ，试求：

5) $\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) \frac{2 \sin \omega}{\omega} e^{j2\omega} d\omega$



6) $\mathcal{F}^{-1}\{\text{Re}[F(j\omega)]\}$ 的波形



$$f_{\text{ev}}(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2}$$

3.4 补充：信号的能量谱与功率谱

能量信号的相关定理与能量谱

功率信号的功率谱与维纳-辛钦定理

■ 能量信号的相关定理与能量谱

对于能量信号，互相关函数定义为：

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t + \tau) f_2(t) dt$$

注意：角标数字，前

$$R_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t - \tau) f_2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t + \tau) dt$$

面的信号领先时间 τ

互相关函数的傅里叶变换满足：

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega), \quad f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega), \quad \text{则：} \begin{cases} R_{12}(\tau) \leftrightarrow F_1(j\omega)F_2^*(j\omega) \\ R_{21}(\tau) \leftrightarrow F_1^*(j\omega)F_2(j\omega) \end{cases}$$

对于自相关函数：

$$R(\tau) \leftrightarrow F(j\omega)F^*(j\omega) = |F(j\omega)|^2$$

自相关函数的傅里叶变换为信号的**能量谱函数**。

■ 功率信号的功率谱与维纳-辛钦定理

从信号 $f(t)$ 中截取 $|t| \leq T/2$ 的一段，得到一个 T 长截断函数 $f_T(t)$ ，可表示为：

$$f_T(t) = f(t) \left[\varepsilon\left(t + \frac{T}{2}\right) - \varepsilon\left(t - \frac{T}{2}\right) \right]$$

则 T 有限时，函数 $f_T(t)$ 为能量信号，其能量为：

$$E_T = \int_{-\infty}^{+\infty} f_T^2(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_T(j\omega)|^2 d\omega \quad \mathcal{F}[f_T(t)] = F_T(j\omega)$$

$$P \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(j\omega)|^2}{T} d\omega$$

功率密度谱

$$P(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(j\omega)|^2}{T}$$

功率谱为 ω 的偶函数，仅取决于频谱函数的模量。

■ 功率信号的功率谱与维纳-辛钦定理

功率信号自相关函数的定义为：

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) f(t - \tau) dt \right]$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[R(\tau)] &= \mathcal{F} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) f(t - \tau) dt \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \underbrace{\mathcal{F} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_T(t) f_T(t - \tau) dt \right]}_{|F_T(j\omega)|^2} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(j\omega)|^2}{T} \end{aligned}$$

$$R(\tau) \leftrightarrow P(\omega)$$

结论： 功率信号的功率谱与自相关函数是一对傅里叶变换，称为维纳-辛钦（Wiener-Khintchine）定理。

3.5 周期信号的傅里叶变换

一般周期信号的傅里叶变换

周期信号傅里叶系数与傅里叶变换的关系

求解周期信号傅里叶变换的方法

■ 一般周期信号的傅里叶变换

周期为 T 的周期信号可以展开为指数形式的傅里叶级数

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\Omega t}, \quad \Omega = \frac{2\pi}{T} \quad \mathcal{F}[f_T(t)] = \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\Omega t}\right]$$

F_n 与 t 无关, 因此: $\mathcal{F}[f_T(t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \mathcal{F}[e^{jn\Omega t}]$

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega), \quad e^{jn\Omega t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - n\Omega)$$

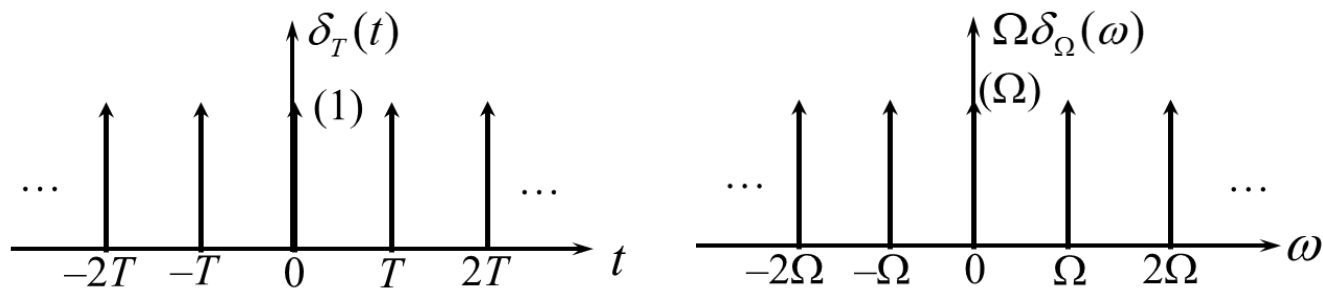
一般周期信号的傅里叶变换:

$$\mathcal{F}[f_T(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \delta(\omega - n\Omega), \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

周期信号的频谱密度由冲激序列组成

- **冲激位置:** $\omega = n\Omega$ 谐波频率处
- **冲激强度:** $2\pi F_n$ 由傅里叶系数确定

例题28 求周期冲激序列 $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$ 的傅里叶变换。



$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) \leftrightarrow \Omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega-n\Omega) \triangleq \Omega\delta_\Omega(\omega), \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

■ 周期信号傅里叶系数与傅里叶变换的关系

任意周期为 T 的周期信号 $f_T(t)$ 可以表示为第一个周期内的脉冲信号 $f_0(t)$ 和周期冲激序列卷积的结果，即：

$$f_T(t) = f_0(t) * \delta_T(t) = \underline{f_0(t)} * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

$$F(j\omega) = \underline{F_0(j\omega)} \cdot \Omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\Omega) = \Omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_0(jn\Omega) \delta(\omega - n\Omega)$$

$$\underline{F(j\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \delta(\omega - n\Omega)} = \Omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_0(jn\Omega) \delta(\omega - n\Omega)$$

$$2\pi F_n = \Omega F_0(jn\Omega) \Rightarrow \boxed{F_n = \frac{1}{T} F_0(jn\Omega) = \frac{1}{T} F_0(j\omega) \Big|_{\omega=n\Omega}}$$

■ 求解周期信号傅里叶变换的方法

$$\mathcal{F}[f_T(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \delta(\omega - n\Omega), \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

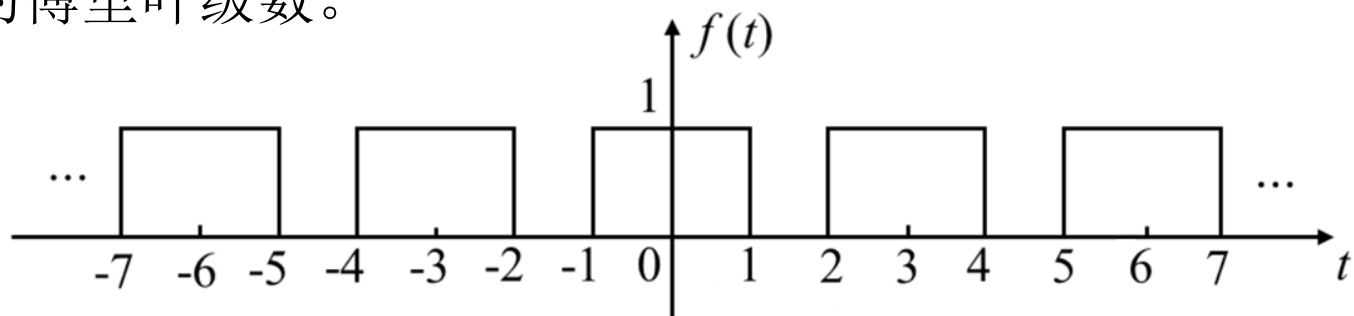
$$F_n = \frac{1}{T} F_0(jn\Omega) = \frac{1}{T} F_0(j\omega) \Big|_{\omega=n\Omega}$$

$$\mathcal{F}[f_T(t)] = \Omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_0(jn\Omega) \delta(\omega - n\Omega), \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

- 找周期信号在第一个周期内的单体 $f_0(t)$;
- 求 $f_0(t)$ 对应的傅里叶变换 $F_0(j\omega)$;
- 周期信号的傅里叶系数为 $F_n = \frac{1}{T} F_0(jn\Omega) = \frac{1}{T} F_0(j\omega) \Big|_{\omega=n\Omega}$;
- 周期信号的傅里叶变换 $\mathcal{F}[f_T(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \delta(\omega - n\Omega), \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}$ 。

例题29

已知周期矩形脉冲信号如图所示，试求此信号的傅里叶变换与指数形式的傅里叶级数。



3.6 抽样定理

理想抽样及其信号的频谱

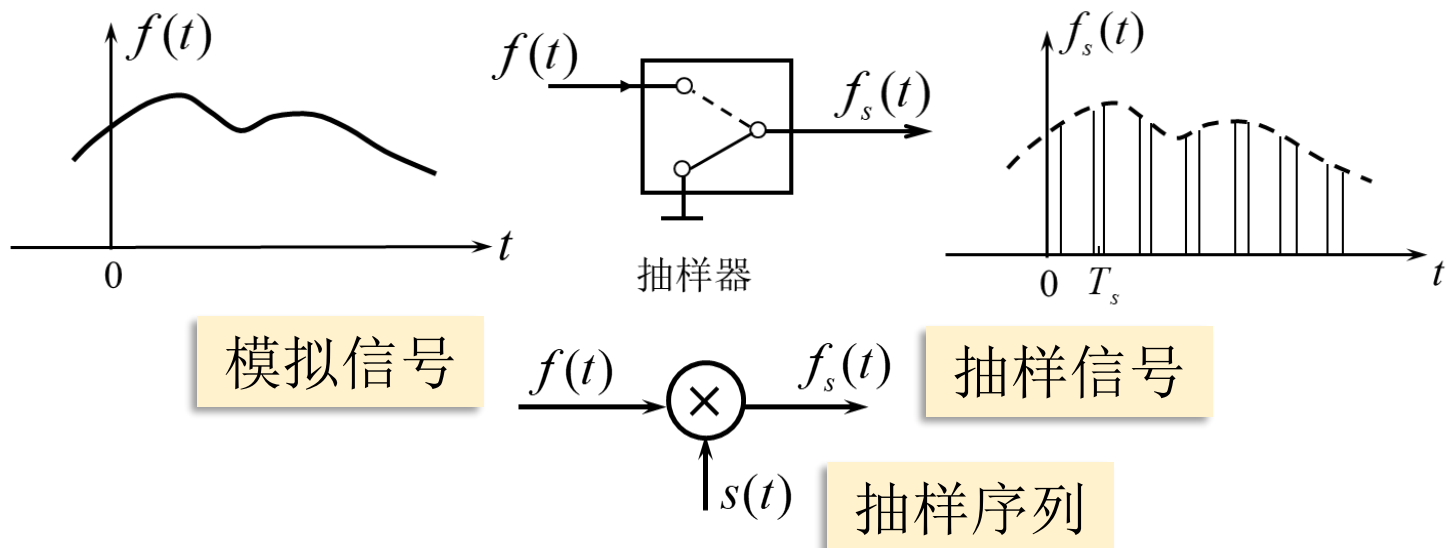
矩形抽样及其信号的频谱

时域抽样定理

时域原信号的恢复

■ 理想抽样及其信号的频谱

抽样的概念

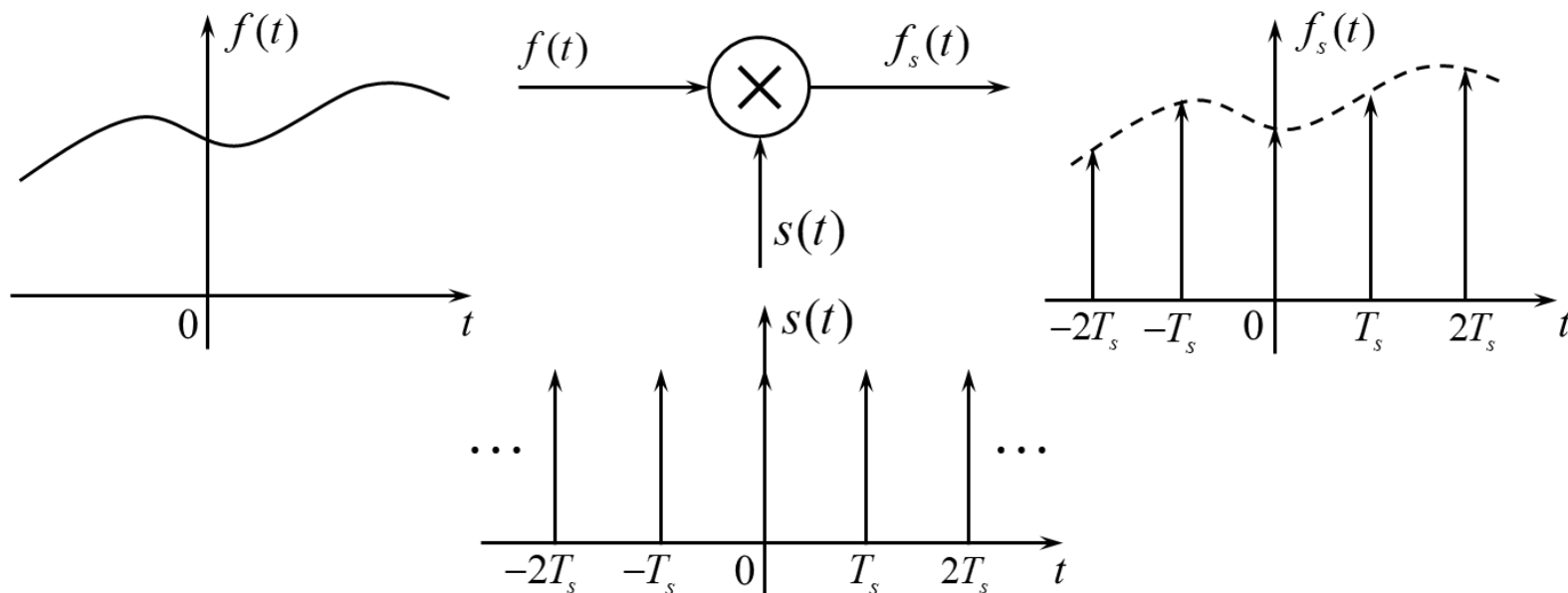


抽样可以将模拟信号转化为一系列时间离散的样值信号。实际中多采用均匀抽样，抽样间隔 T_s 记为抽样周期， $f_s = 1/T_s$ 称为抽样频率。

$$f_s(t) = f(t) \cdot s(t)$$

理想抽样及其信号的频谱

理想抽样信号及其频谱



冲激脉冲序列
$$s(t) = \delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s)$$

理想抽样信号
$$f_s(t) = f(t) \cdot \delta_{T_s}(t) = f(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_s) \delta(t - nT_s)$$

■ 理想抽样及其信号的频谱

理想抽样信号及其频谱

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) \leftrightarrow S(j\omega) = \omega_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_s), \omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

$$f_s(t) = f(t) \cdot s(t) \iff F_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * S(j\omega)$$

$$= \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * \omega_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$$

$$= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F[j(\omega - n\omega_s)]$$

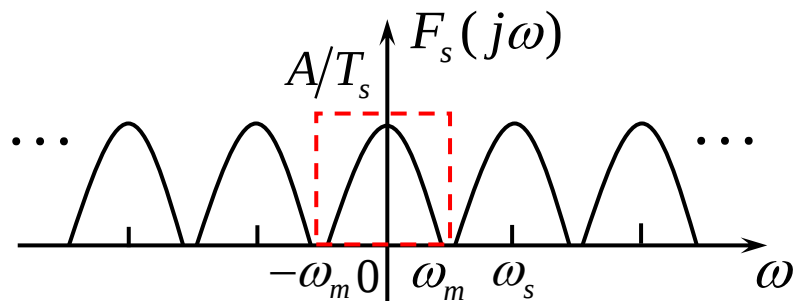
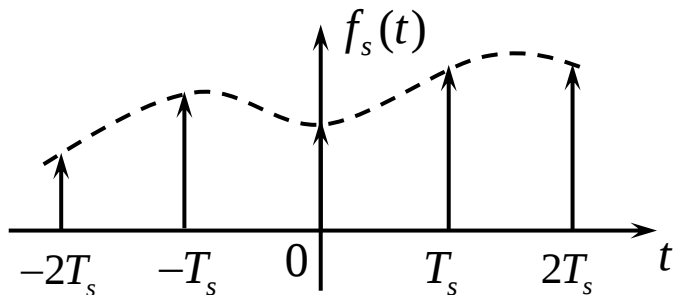
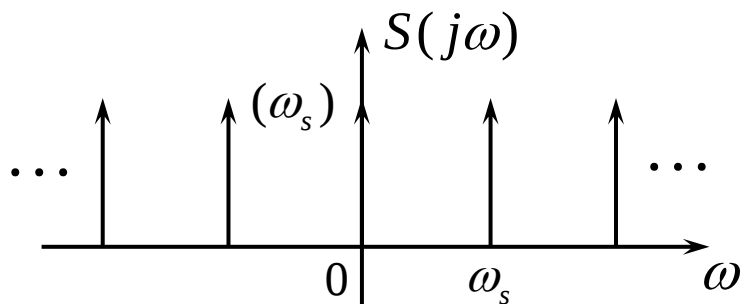
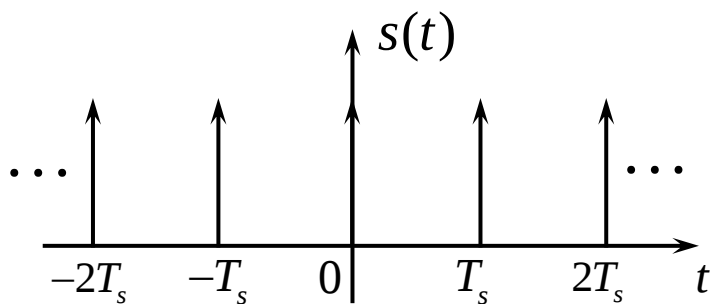
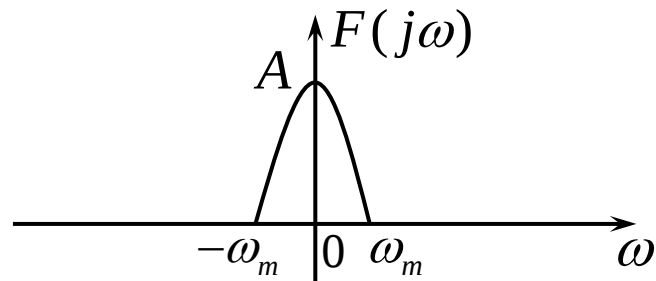
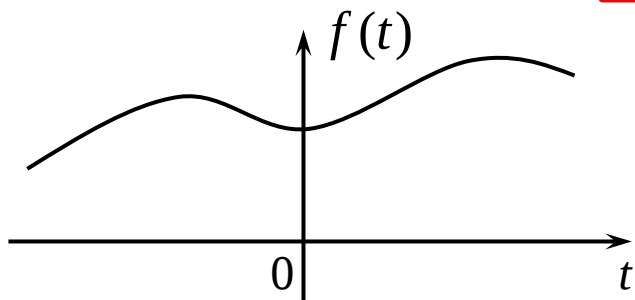
$$F_s(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F[j(\omega - n\omega_s)]$$

- $F_s(j\omega)$ 为信号频谱 $F(j\omega)$ 以 ω_s 为周期延拓
- 频谱幅度变为原先的 $\frac{1}{T_s}$

理想抽样及其信号的频谱

理想抽样信号及其频谱

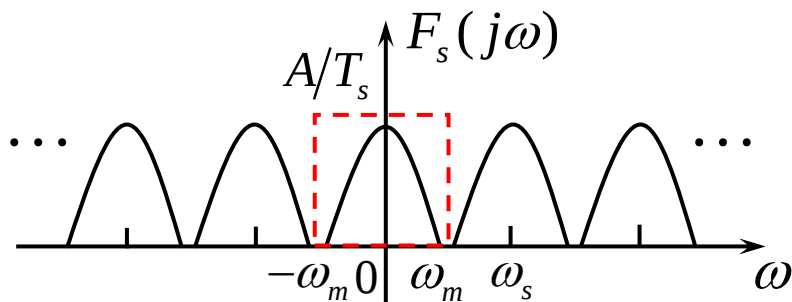
$$F_s(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F[j(\omega - n\omega_s)]$$



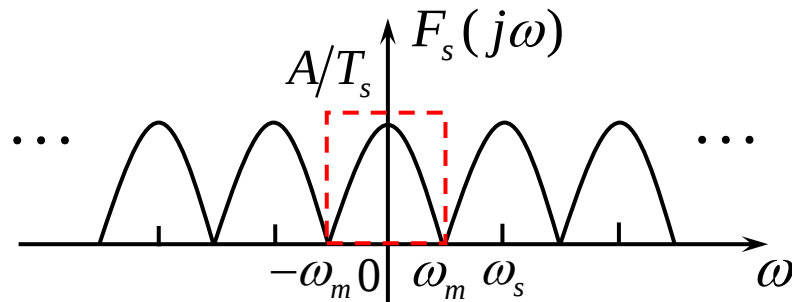
■ 理想抽样及其信号的频谱

理想抽样信号及其频谱

$$F_s(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F[j(\omega - n\omega_s)]$$



$$f_s > 2 f_m$$



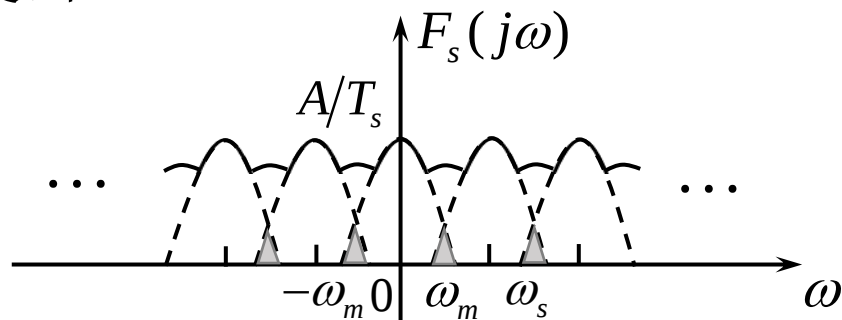
$$f_s = 2 f_m$$

$f_s \geq 2 f_m$ 时，各个频谱之间无混叠，可以分离出原信号的频谱

由抽样序列 $\{f(nT_s)\}$ 可无失真地恢复出 $f(t)$

$f_s < 2 f_m$ 时，频谱之间产生混叠，
无法分离出原信号的频谱。

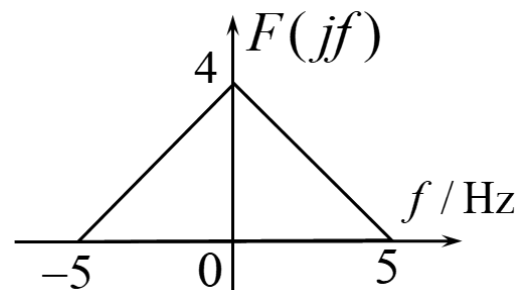
由 $\{f(nT_s)\}$ 不能无失真地恢复 $f(t)$



$$f_s < 2 f_m$$

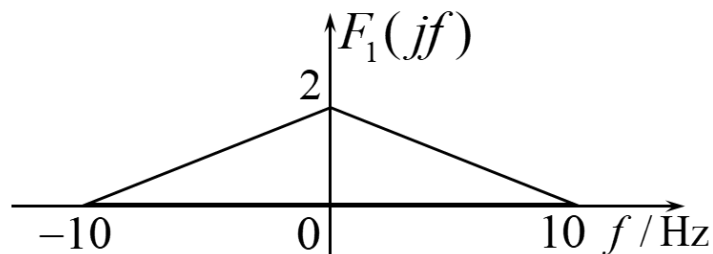
例题30

已知信号的频谱如图所示，其最高频率为5Hz，对 $f(2t)$ 进行理想抽样，分别作出抽样频率为16Hz、20Hz、25Hz时抽样信号的频谱图。



$$f(2t) \leftrightarrow \frac{1}{2} F\left(j \frac{f}{2}\right)$$

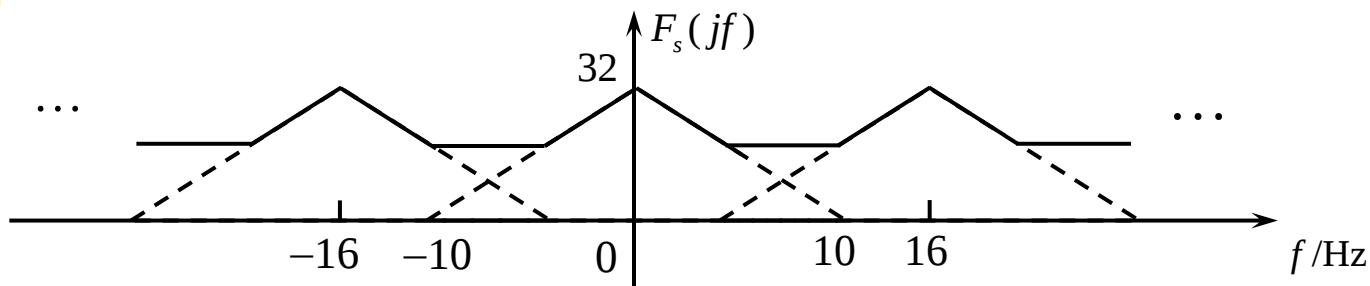
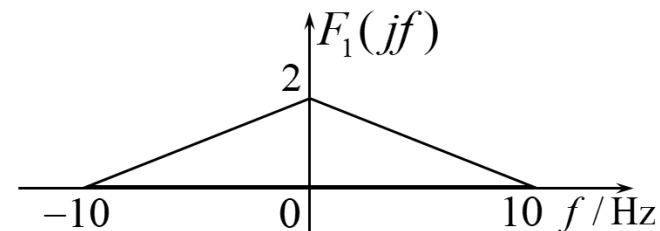
频谱展宽，幅度减半



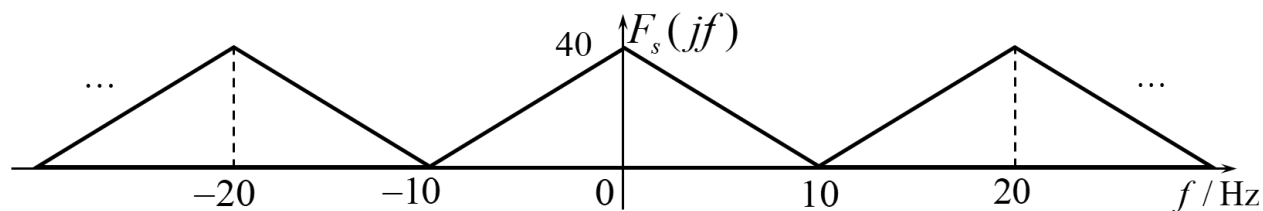
例题30

$$F_s(jf) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F[j(f - nf_s)]$$

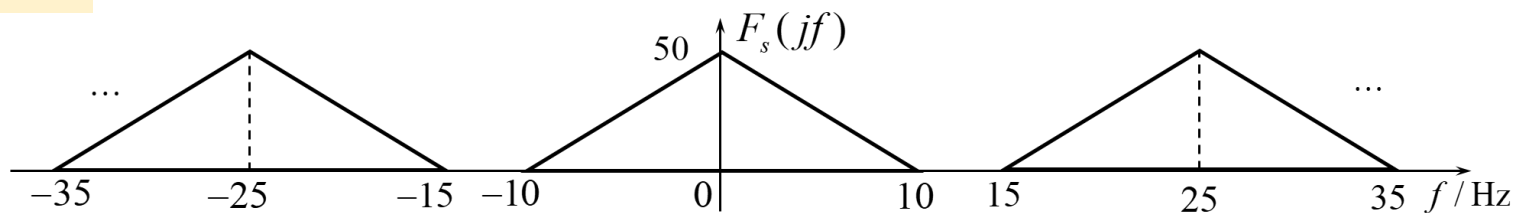
$$f_s = 16\text{Hz}$$



$$f_s = 20\text{Hz}$$



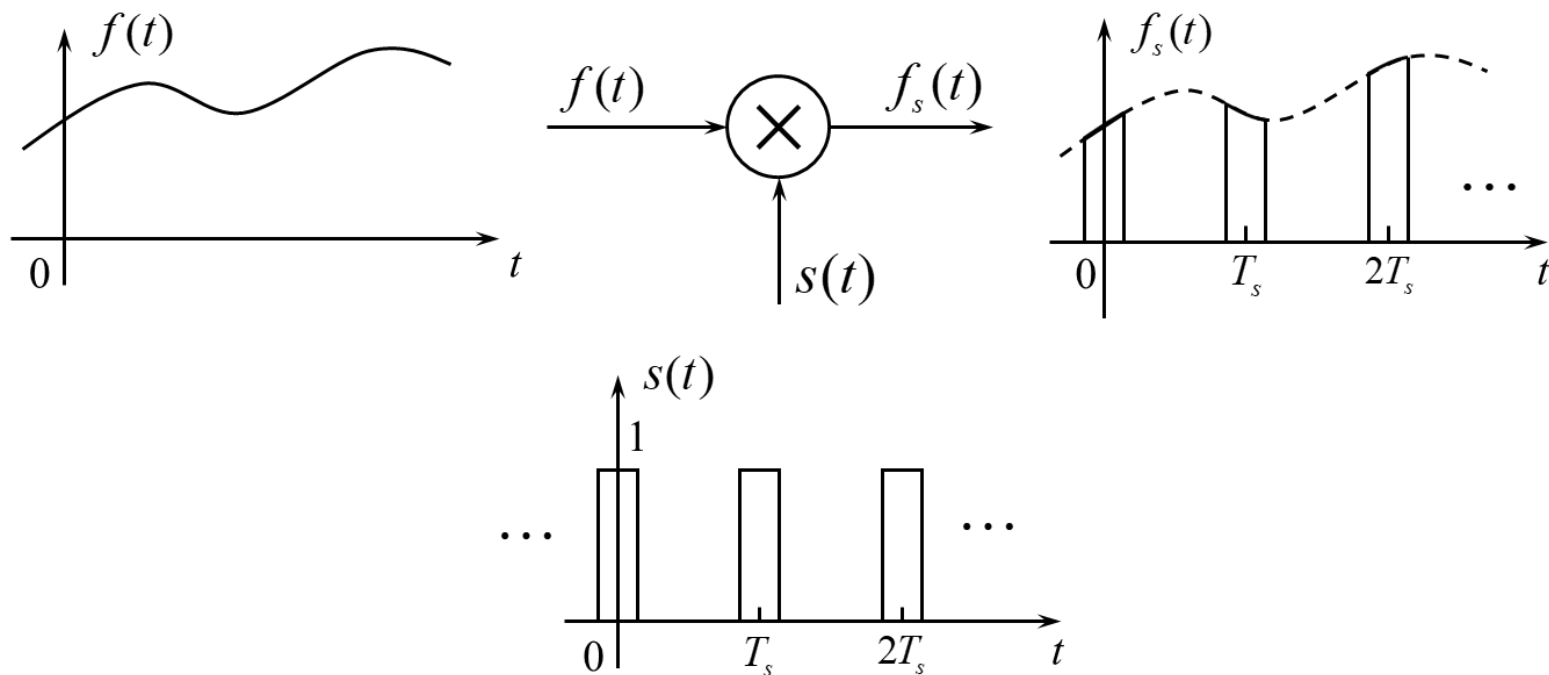
$$f_s = 25\text{Hz}$$



■ 矩形抽样及其信号的频谱

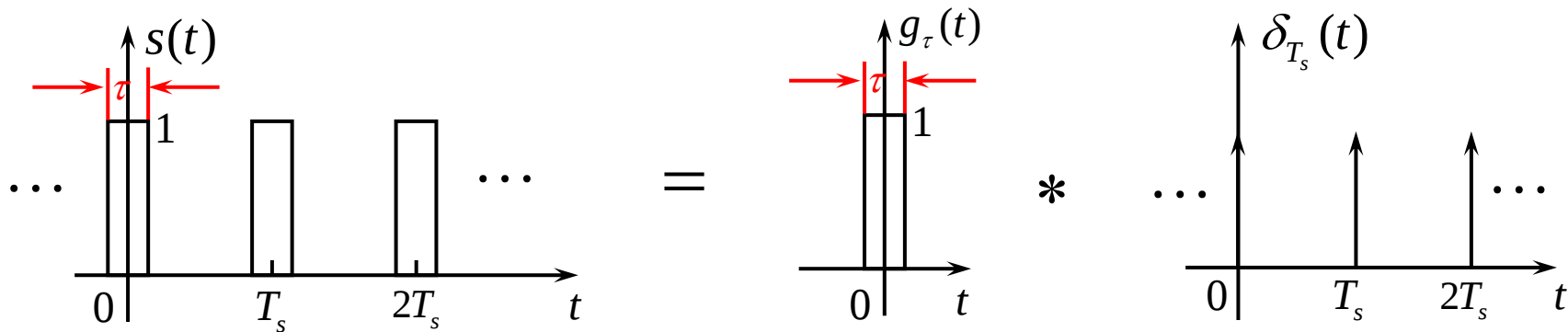
矩形抽样的定义

抽样脉冲为矩形脉冲，此时抽样信号的脉冲顶部随着原信号 $f(t)$ 变化，这样的抽样称为矩形抽样。



■ 矩形抽样及其信号的频谱

矩形抽样信号的频谱 设矩形脉冲脉宽 τ ，周期 T_s



$$s(t) = g_\tau(t) * \delta_{T_s}(t)$$

$$S(j\omega) = \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \cdot \frac{2\pi}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_s) = \frac{2\pi\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_s)$$

$$F_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * S(j\omega) = \frac{\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right) F[j(\omega - n\omega_s)]$$

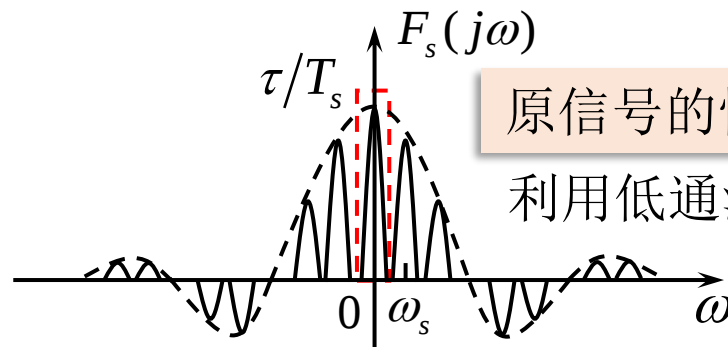
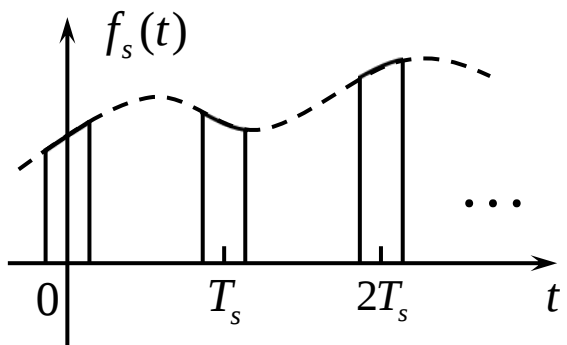
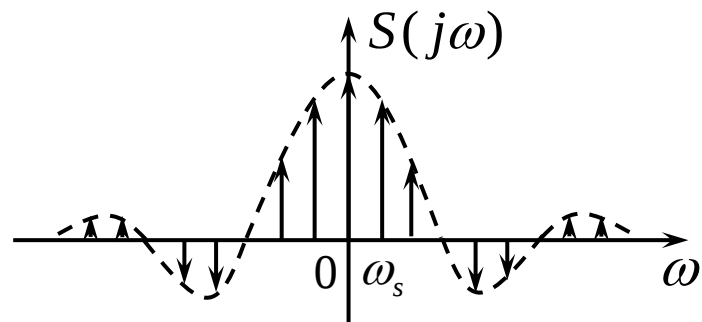
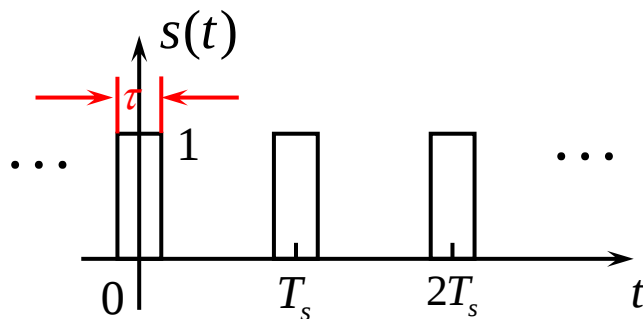
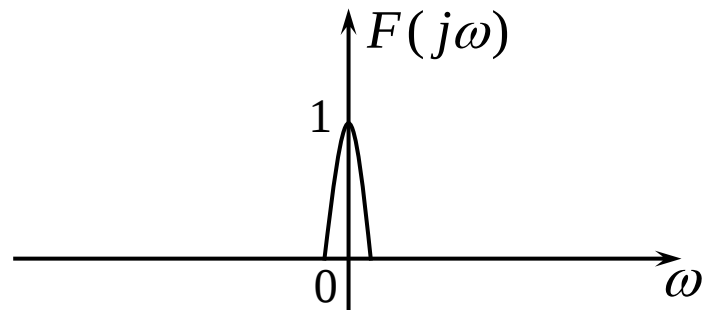
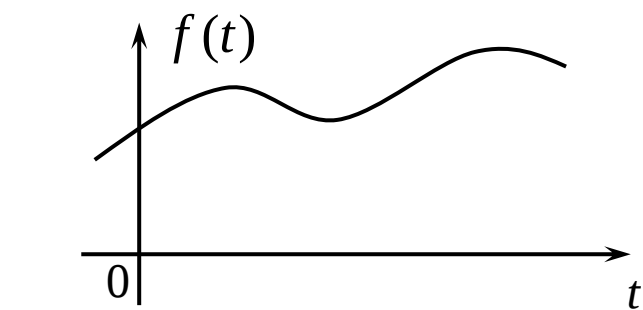
$$F_s(j\omega) = \frac{\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right) F[j(\omega - n\omega_s)]$$

- $F_s(j\omega)$ 被 Sa 函数加权，包络满足 Sa 函数的变化规律

■ 矩形抽样及其信号的频谱

矩形抽样信号的频谱

$$F_s(j\omega) = \frac{\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right) F[j(\omega - n\omega_s)]$$

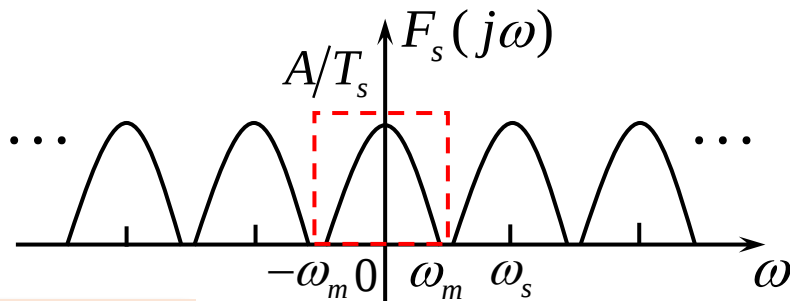


原信号的恢复

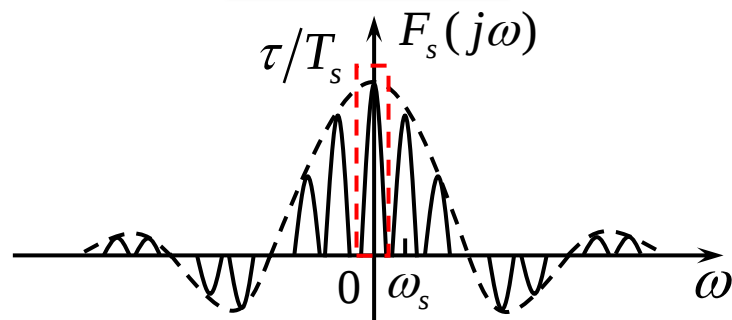
利用低通滤波器

■ 矩形抽样及其信号的频谱

理想抽样



矩形抽样



相同点

- 均为无穷多个间隔为 ω_s 的 $F(j\omega)$ 叠加而成
- 抽样频率满足要求时，均可以通过低通滤波器恢复原信号

不同点

- 理想抽样信号频谱被常数加权，带宽无穷大
- 矩形抽样信号频谱被Sa函数加权，最终收敛于0，第一过零点带宽为

$$B_{\omega} = \frac{2\pi}{\tau} \text{ (rad/s)} \text{ 或 } B_f = \frac{1}{\tau} \text{ (Hz)}$$

提高传输速度 $\longleftrightarrow$ 压缩传输带宽

矛盾

■ 时域抽样定理

$f_s \geq 2f_m$ 时，各个频谱之间无混叠，可以分离出原信号的频谱

$f_s < 2f_m$ 时，频谱之间产生混叠，无法分离出原信号的频谱

时域抽样定理内容

一个频带限制在 $(0, f_m)$ 内的低通信号 $f(t)$ ，如果以 $f_s \geq 2f_m$ 的速率进行均匀抽样，则由抽样序列 $\{f(nT_s)\}$ 可无失真地恢复出 $f(t)$ 。

奈奎斯特抽样速率

$$f_s = 2f_m$$

最小抽样速率

奈奎斯特抽样间隔

$$T_s = \frac{1}{2f_m}$$

最大抽样间隔

在工程中，若信号不是频带有限信号，则往往通过截止频率为 f_m 的低通滤波器让其频带有限，称为抗混叠滤波。

例题31

若信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的最高角频率分别为 $3\pi \times 10^5 \text{ rad/s}$ 和 $2\pi \times 10^5 \text{ rad/s}$,
试求对下列信号进行时域抽样时的奈奎斯特抽样频率。

- 1) $f_1(\frac{1}{2}t)$ 2) $f_2^3(t)$ 3) $f_1(t) \cdot f_2(t)$ 4) $f_1(t) * f_2(2t)$ 5) $f_1(t) + f_2(2t)$

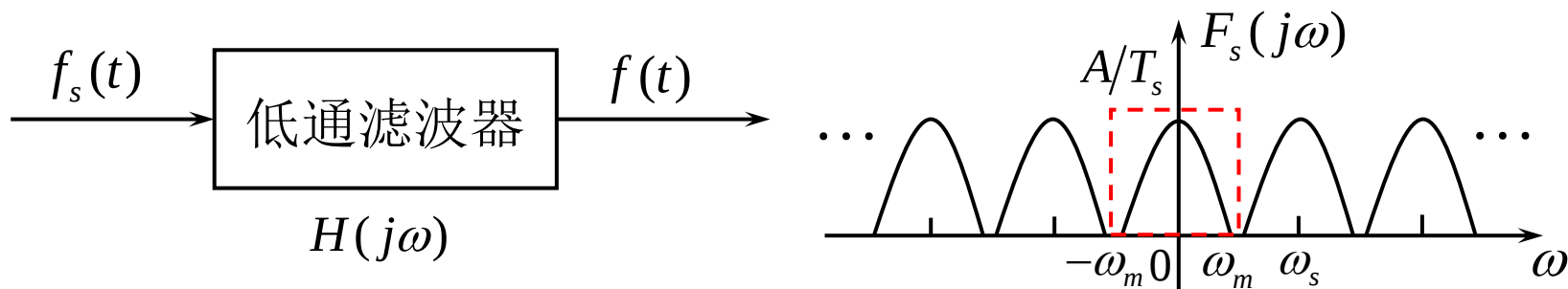
■ 时域抽样定理

小结 $f_1(t)$ 的最高角频率为 ω_{m1} ， $f_2(t)$ 的最高角频率为 ω_{m2}

信号表达式	频谱	最高角频率 ω_m	奈奎斯特角频率 $\omega_s = 2\omega_m$
$f_1(\alpha t) \quad \alpha \neq 0$	$\frac{1}{ \alpha } F_1(j\omega/\alpha)$	$ \alpha \omega_{m1}$	$2 \alpha \omega_{m1}$
$f_1(t) + f_2(t)$	$F_1(j\omega) + F_2(j\omega)$	$\max\{\omega_{m1}, \omega_{m2}\}$	$2 \max\{\omega_{m1}, \omega_{m2}\}$
$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega)$	$\min\{\omega_{m1}, \omega_{m2}\}$	$2 \min\{\omega_{m1}, \omega_{m2}\}$
$f_1(t) \cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) * F_2(j\omega)$	$\omega_{m1} + \omega_{m2}$	$2(\omega_{m1} + \omega_{m2})$
$f_1^2(t)$	$\frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) * F_1(j\omega)$	$2\omega_{m1}$	$4\omega_{m1}$

■ 时域原信号的恢复

利用低通滤波器恢复原信号。



低通滤波器的特性

$$H(j\omega) = \begin{cases} T_s & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases} = T_s g_{2\omega_c}(\omega)$$

截止频率需满足： $\omega_m \leq \omega_c \leq \omega_s - \omega_m$ ($f_m \leq f_c \leq f_s - f_m$)

例题32

带限信号 $f(t)$ 的最高频率为 300Hz，若对 $y(t) = \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{t}{3}\right) * f(2t) \right] \cdot f(t)$ 进行时域抽样，为了使这一抽样信号通过一低通滤波器后能完全恢复原信号，则抽样频率应满足 _____；若对 $y(t)$ 以 $T_s = 1\text{ms}$ 进行抽样，低通滤波器的截止频率 f_c 应满足 _____。

最高频率分析 $y(t) = \frac{1}{2} \left[\underline{f\left(\frac{t}{3}\right)} * \underline{f(2t)} \right] \cdot f(t)$

频域压缩至1/3 → 100Hz

频域展宽1倍 → 600Hz

频域相乘，取小 → 100Hz

300Hz

频域卷积，相加 → $f_m = 400\text{Hz}$

$$f_s \geq 2f_m$$

$$f_m \leq f_c \leq f_s - f_m$$

■ 时域原信号的恢复

原信号的恢复：内插公式

假设 $f_s = 2f_m$, $\omega_c = \omega_m$

$$F(j\omega) = F_s(j\omega) \cdot H(j\omega) \iff f(t) = f_s(t) * h(t)$$

$$H(j\omega) = \begin{cases} T_s & |\omega| \leq \omega_m \\ 0 & |\omega| > \omega_m \end{cases} = T_s g_{2\omega_m}(\omega) \quad \leftrightarrow \quad h(t) = T_s \frac{\sin \omega_m t}{\pi t} = Sa(\omega_m t)$$

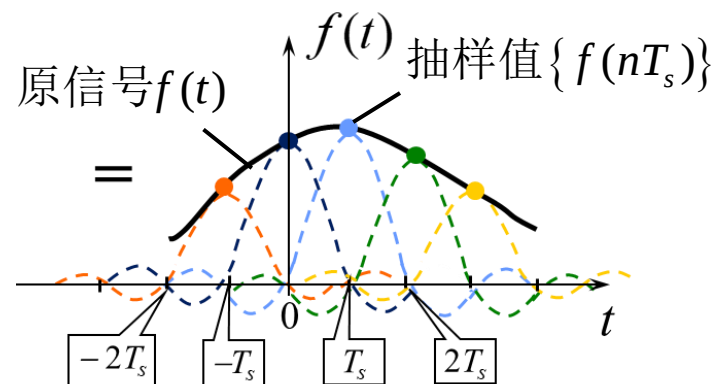
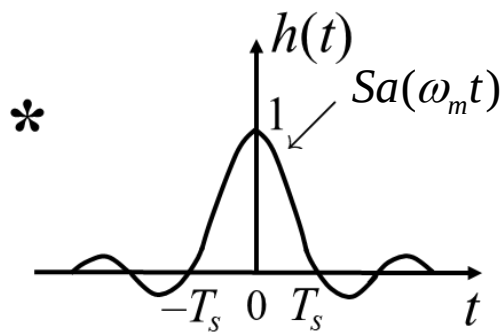
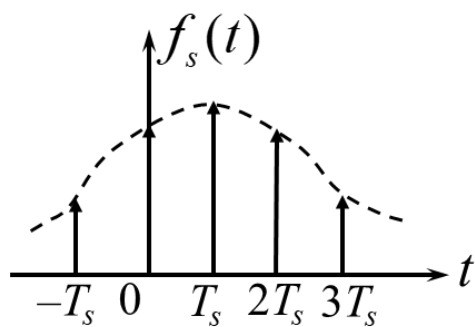
$$\begin{aligned} f(t) &= f_s(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_s) \delta(t - nT_s) * Sa(\omega_m t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_s) Sa[\omega_m(t - nT_s)] \end{aligned}$$

■ 时域原信号的恢复

原信号的恢复：内插公式

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_s) \underbrace{Sa[\omega_m(t - nT_s)]}_{\text{内插函数}}$$

在恢复原信号时，抽样时刻 $t = nT_s$ 的值由抽样值 $f(nT_s)$ 确定，而抽样时刻之外的信号值则是无穷项内插函数的加权和。



3.7 连续时间系统的频域分析

连续时间系统的频域分析

系统无失真传输条件

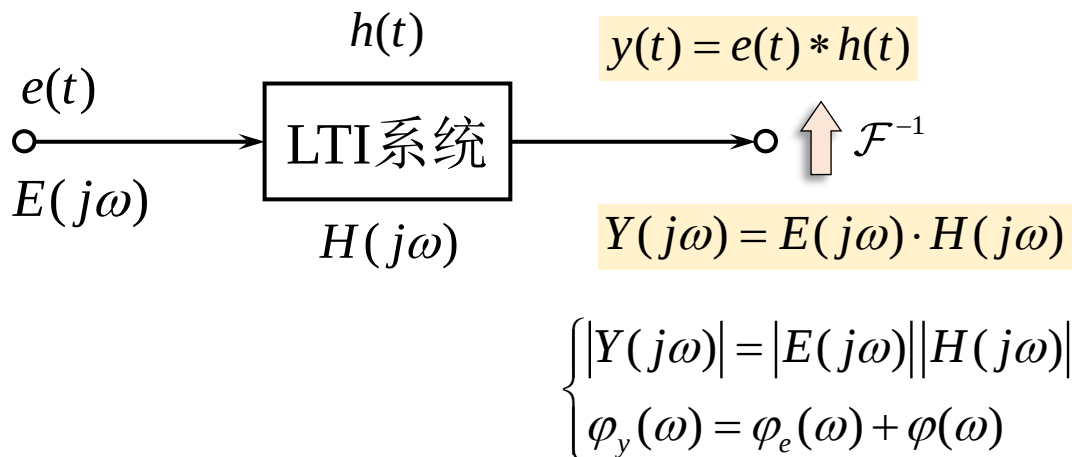
理想低通滤波器的特性

物理可实现系统对系统函数的要求

■ 连续时间系统的频域分析

连续时间系统的频率响应函数

将零状态响应 $y_{zs}(t)$ 简记为 $y(t)$

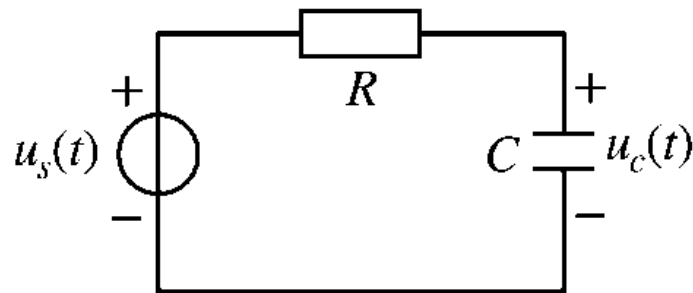


➤ 频率响应函数 $H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{E(j\omega)} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt \quad h(t) \leftrightarrow H(j\omega)$

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} \begin{cases} \text{幅频特性} & |H(j\omega)| \sim \omega \text{ 的偶函数} \\ \text{相频特性} & \varphi(\omega) \sim \omega \text{ 的奇函数} \end{cases}$$

例题33

线性系统的输入信号 $u_s(t) = \varepsilon(t)$ ，电路如图所示， $R = 1\Omega$ ， $C = 1\text{F}$ ，已知输入信号加入前电容尚无储能，求电容电压 $u_c(t)$ 与电路的单位冲激响应 $h(t)$ 。

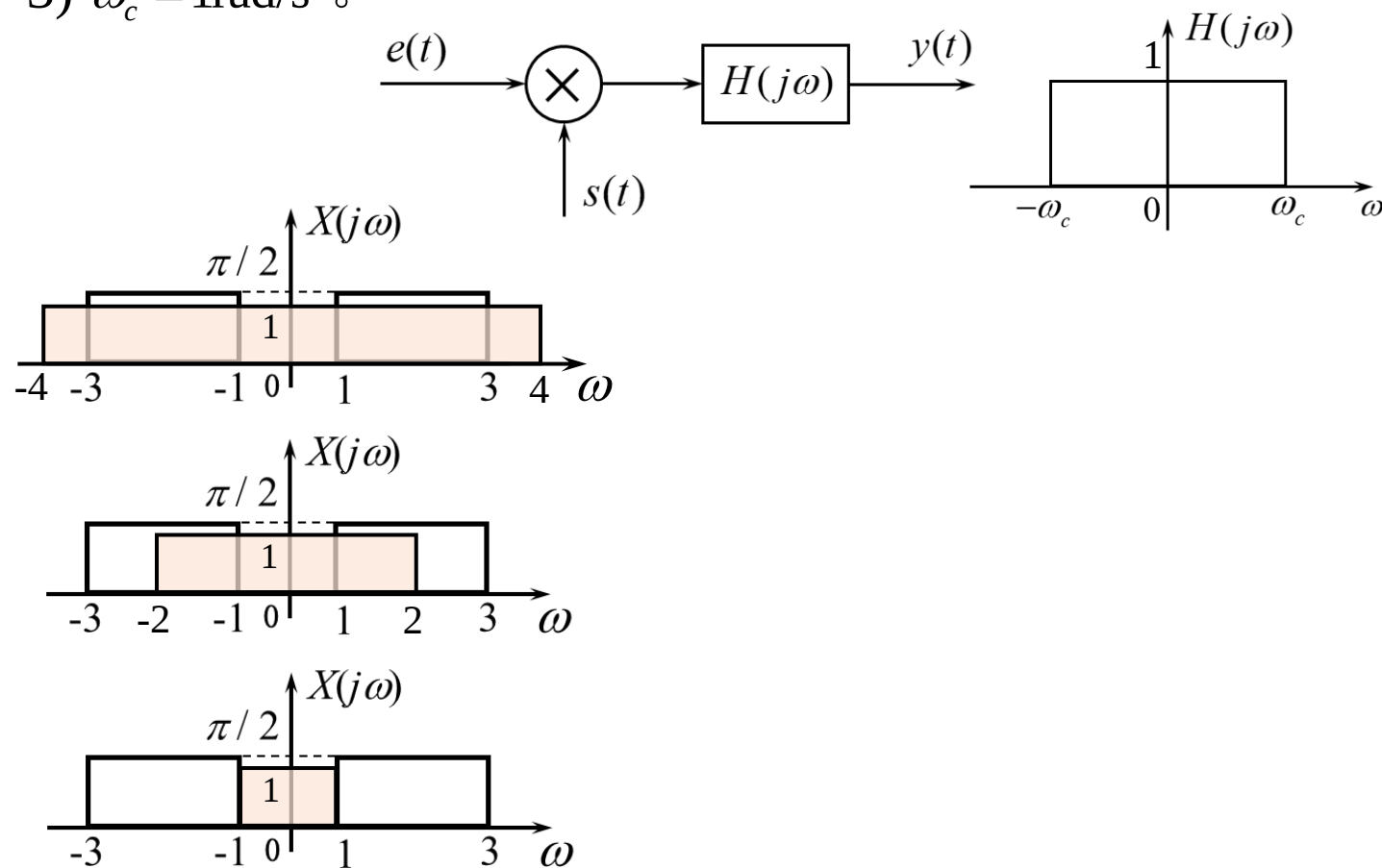


例题34

某连续系统的微分方程为 $y'(t) + 2y(t) = e(t)$, $e(t) = e^{-t}\varepsilon(t)$, $y(0_-) = 0$
试求该系统的系统函数 $H(j\omega)$ 、冲激响应 $h(t)$ 与系统响应 $y(t)$ 。

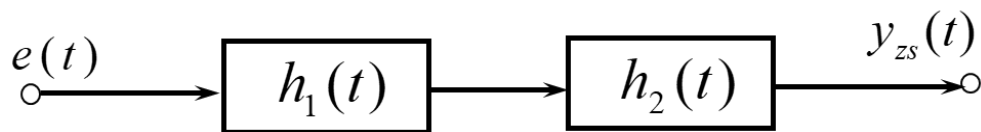
例题35

如图所示系统，已知输入信号 $e(t) = Sa(t)$ ， $s(t) = \cos 2t$ ，系统函数为 $H(j\omega) = g_{2\omega_c}(\omega)$ 。求三种情况下的 $y(t)$ ：1) $\omega_c = 4\text{rad/s}$ ；2) $\omega_c = 2\text{rad/s}$ ；3) $\omega_c = 1\text{rad/s}$ 。



例题36

如图所示系统，子系统分别满足 $h_1(t) = [Sa(\pi t)]^2$ ， $H_2(j\omega) = e^{-j\omega}$ ，激励信号为 $e(t) = \delta_T(t)$ ，其周期为 $T = 2$ ，求系统的零状态响应 $y(t)$ 。

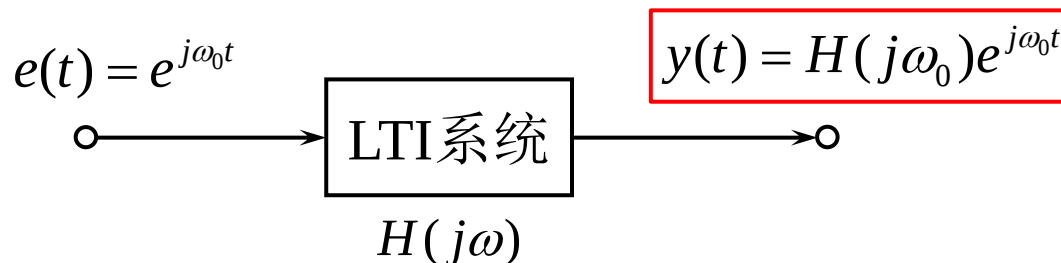


■ 连续时间系统的频域分析

系统对信号的响应

➤ 系统对虚指数信号的响应

$$\begin{cases} f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\Omega t} & \text{基本信号 } e^{jn\Omega t} \\ f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega & \text{基本信号 } e^{j\omega t} \end{cases}$$



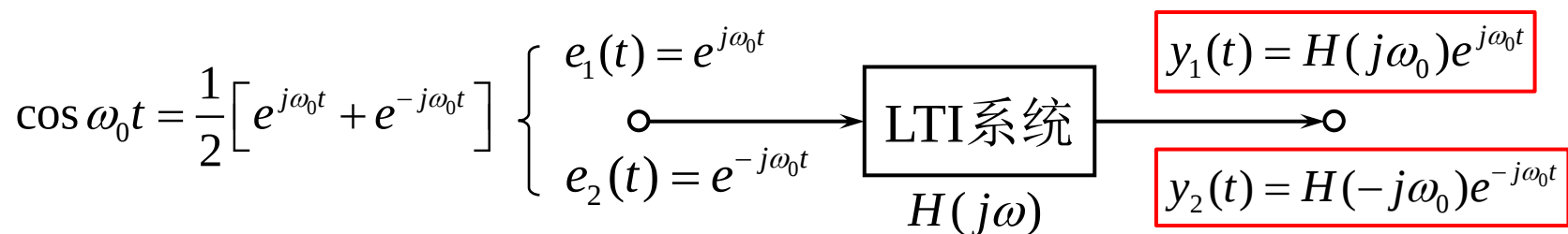
证明: $y(t) = e^{j\omega_0 t} * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{j\omega_0(t-\tau)} d\tau = e^{j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau = H(j\omega_0) e^{j\omega_0 t}$

$$y(t) = H(j\omega_0) e^{j\omega_0 t} = \underline{|H(j\omega_0)|} e^{j[\omega_0 t + \underline{\varphi(\omega_0)}]}$$

附加幅度 附加相位

■ 连续时间系统的频域分析

➤ 系统对正弦信号的响应 $e(t) = \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}]$



$$y(t) = \frac{1}{2} [y_1(t) + y_2(t)] = \frac{1}{2} [H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t} + H(-j\omega_0)e^{-j\omega_0 t}]$$

“模偶相奇”

$$= \frac{1}{2} [|H(j\omega_0)|e^{j\varphi(\omega_0)}e^{j\omega_0 t} + |H(-j\omega_0)|e^{j\varphi(-\omega_0)}e^{-j\omega_0 t}]$$

$$\begin{cases} |H(-j\omega_0)| = |H(j\omega_0)| \\ \varphi(-\omega_0) = -\varphi(\omega_0) \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2} |H(j\omega_0)| [e^{j[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]} + e^{-j[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]}] = |H(j\omega_0)| \cos[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]$$

$$y(t) = \underline{|H(j\omega_0)|} \cos[\omega_0 t + \underline{\varphi(\omega_0)}]$$

附加幅度

附加相位

有时亦称正弦稳态响应

■ 连续时间系统的频域分析

系统对信号的响应

➤ 说明

$$e^{j\omega_0 t} \Rightarrow y(t) = H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t} = |H(j\omega_0)|e^{j[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]}$$

$$\cos \omega_0 t \Rightarrow y(t) = |H(j\omega_0)|\cos[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]$$

激励信号为虚指数/正弦信号时，系统响应仍然为同频率的虚指数/正弦信号，其幅度和相位由系统频率响应函数 $H(j\omega)$ 在 $\omega = \omega_0$ 处的幅度 $|H(j\omega_0)|$ 和相位 $\varphi(\omega_0)$ 确定，并附加在原虚指数/正弦信号上。

➤ 对频率响应函数的理解

系统的频率响应函数 $H(j\omega)$ 对输入信号的不同频率分量有着不同的幅度增益和附加相位，它最终反映了响应的幅度和相位。

例题37

已知某LTI系统的频率响应函数 $H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 2}$ ，试求在如下输入信号的情况下系统的响应 $y(t)$ ：

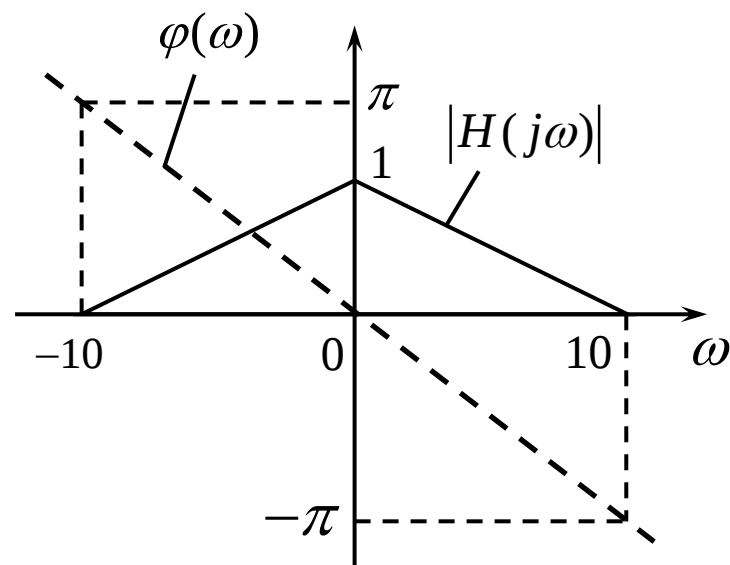
1) $e(t) = \sin t$ 2) $e(t) = \cos 3t$

例题38

某LTI系统的幅频特性和相频特性
如图所示，若系统的激励为

$$e(t) = 2 + 4\cos 5t + 4\cos 10t$$

求系统响应 $y(t)$ 。



■ 连续时间系统的频域分析

➤ 系统对周期信号的响应

变为对离散频率 $n\Omega$ 分析

指数级数：

$$e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\Omega t} \Rightarrow y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{F_n H(jn\Omega)} e^{jn\Omega t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{Y_n} e^{jn\Omega t} \quad \boxed{Y_n = F_n H(jn\Omega)}$$

三角级数：

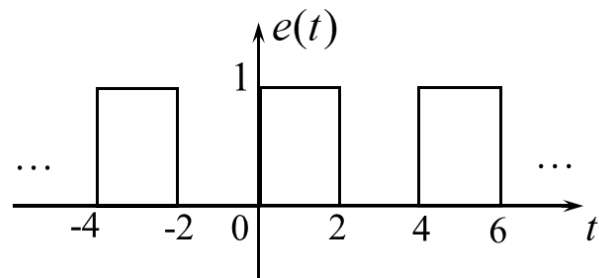
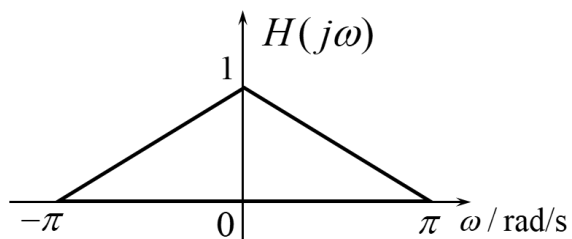
$$e(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n) \Rightarrow y(t) = \frac{A_0}{2} \underline{H(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{A_n |H(jn\Omega)|} \cos[n\Omega t + \underline{\varphi_n + \varphi(n\Omega)}]$$

直流增益 幅度相乘 相位相加

激励信号为周期信号时，系统的响应仍然为相同周期的信号，响应各离散分量的幅度和相位由系统频率响应函数 $H(j\omega)$ 在 $\omega = n\Omega$ 处的幅度 $|H(jn\Omega)|$ 和相位 $\varphi(n\Omega)$ 确定，并附加在各信号分量上。

例题39

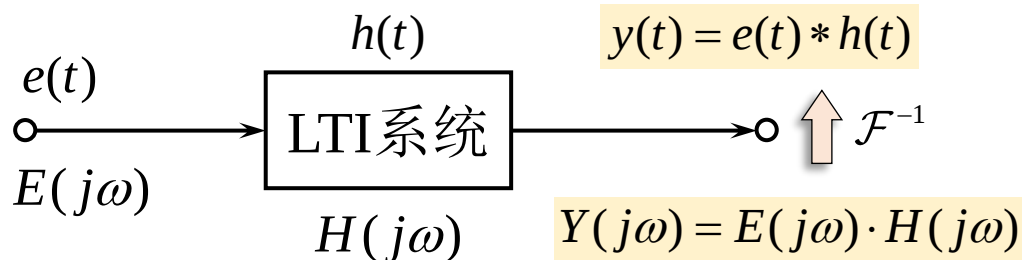
已知某系统的系统函数 $H(j\omega)$ 如图，若以图示周期信号 $e(t)$ 为激励，试求系统的零状态响应 $y(t)$ 。



■ 连续时间系统的频域分析

系统对信号的响应

➤ 系统对任意信号的响应



$$e^{j\omega t} \longrightarrow H(j\omega)e^{j\omega t}$$

$$\frac{1}{2\pi} E(j\omega) d\omega \cdot e^{j\omega t} \longrightarrow \frac{1}{2\pi} E(j\omega) d\omega \cdot H(j\omega) e^{j\omega t}$$

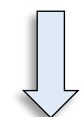
齐次性

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \longrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(j\omega) H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

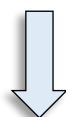
可加性

虚指数信号的线性组合

虚指数信号响应的线性组合



$e(t)$



$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}[E(j\omega)H(j\omega)]$$

理解傅里叶变换
的信号分解思想

■ 系统无失真传输条件

系统失真及产生原因

若信号经过系统以后，输出信号与输入信号的波形相比产生了畸变，则称信号产生了失真。失真分为两类：**线性失真**与**非线性失真**。

线性失真

信号通过线性系统所产生的失真，特点是信号经过系统后**不产生新的频率分量**，只包含**幅度失真**和**相位失真**。

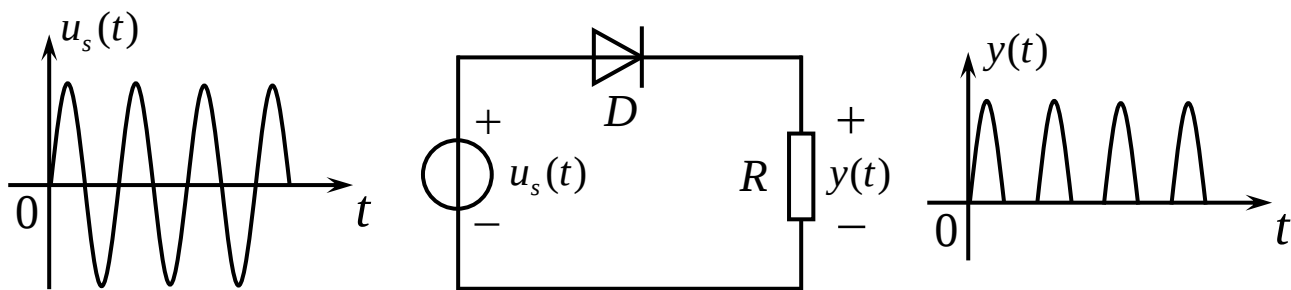
这是由于系统的频率特性不是线性，导致信号各频率分量的时间延迟和幅度增减不一致。

- **幅度失真**：信号各频率分量在**幅度上的增减**不一致。
- **相位失真**：信号各频率分量在**时间上的延迟**不一致。

■ 系统无失真传输条件

非线性失真

信号通过非线性系统所产生的失真，特点是信号经过系统后**产生新的频率分量**。



例：单频正弦波通过二极管，负半周波形被抑制，根据傅里叶级数的知识，输出信号会产生无穷多个谐波分量，即新的频率分量。

■ 系统无失真传输条件

无失真的概念

如果一个信号在经过系统之后，只引起输出信号在**时间上的延迟**和**幅度的增减**，而波形的形状没有发生变化，则称信号无失真。此时系统输入-输出关系满足表达式：

$$y(t) = Ke(t - t_d)$$

此时信号所有频率分量的延时和幅度的增减完全一致，如下图。



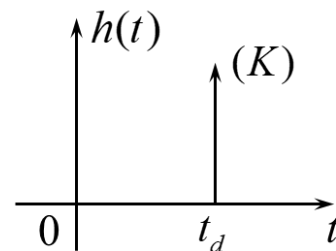
■ 系统无失真传输条件

系统无失真传输条件

$$y(t) = Ke(t - t_d) = e(t) * K\delta(t - t_d) \quad Y(j\omega) = KE(j\omega)e^{-j\omega t_d}$$

单位冲激响应 $h(t) = K\delta(t - t_d)$ 时域条件

频率响应函数 $H(j\omega) = Ke^{-j\omega t_d}$ 频域条件



幅频响应

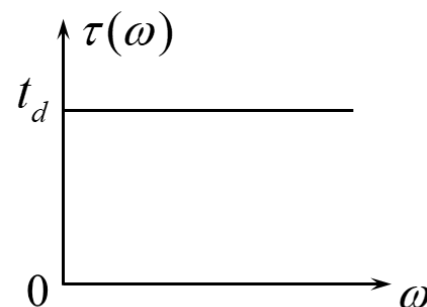
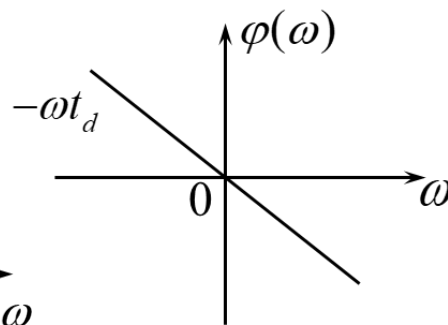
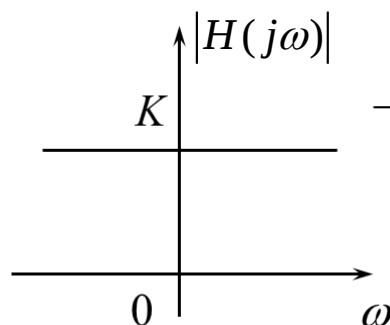
$$|H(j\omega)| = K$$

相频响应

$$\varphi(\omega) = -\omega t_d$$

群延时响应

$$\tau(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = t_d$$

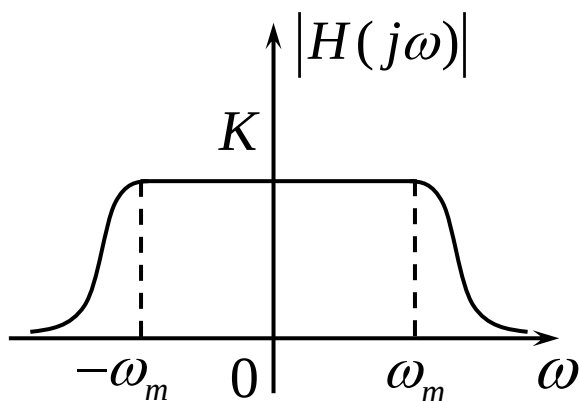


信号不同频率分量
幅度变化增益相同
系统无幅度失真

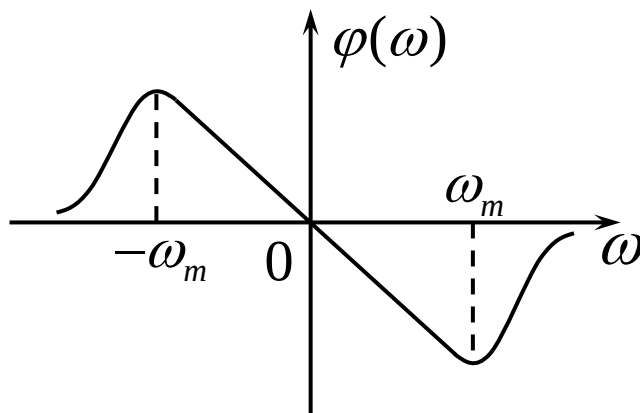
信号不同频率分量到达
输出端的时间先后一致
系统无相位失真

■ 系统无失真传输条件

在实际中理想的无失真传输系统不能实现，因为其频带无限宽。若在系统中传输频带有限的信号。在设计系统时，让系统在输入信号的频带范围内满足无失真传输条件即可。



幅频特性



相频特性

例题40

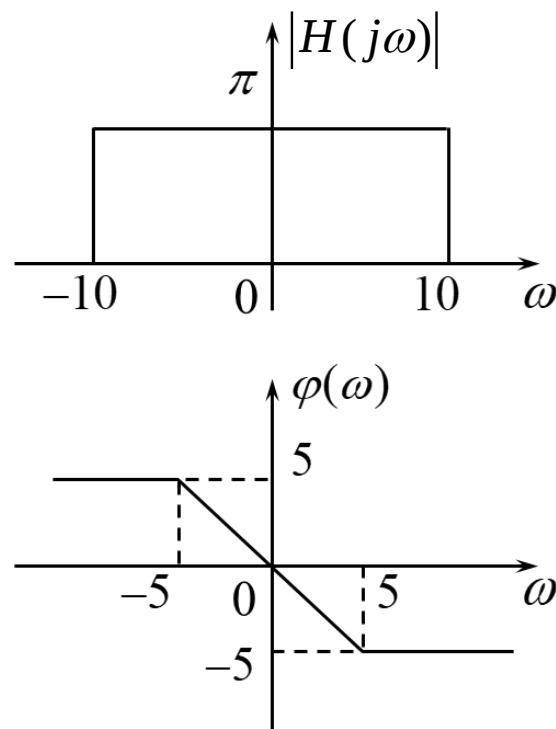
系统的幅频特性和相频特性如图所示，则下列信号通过该系统时，不会产生失真的是：

(A) $f(t) = \cos t + \cos 8t$

(B) $f(t) = \sin 2t + \sin 4t$

(C) $f(t) = \sin 2t \cdot \sin 4t$

(D) $f(t) = \cos^2 4t$

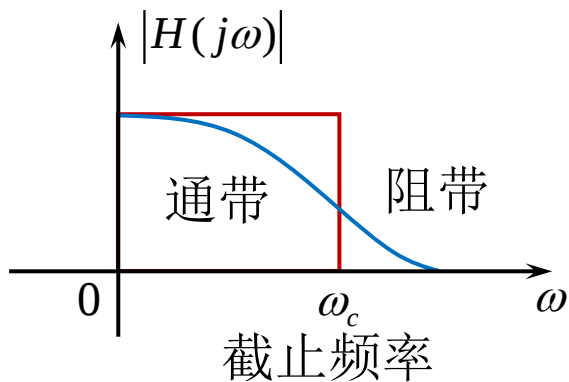


■ 理想低通滤波器的特性

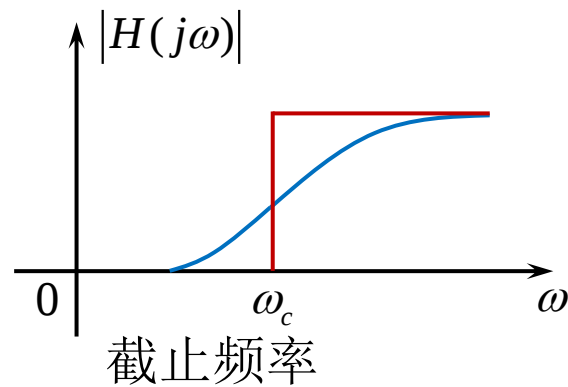
滤波器简述

- 信号在通过一个系统时，某些频率分量能够正常通过，某些频率分量被抑制，称这样的系统为滤波器。
- 按照滤波的效果可分为：低通滤波器（Low-Pass Filter, LPF）、高通滤波器（High-Pass Filter, HPF）、带通滤波器（Band-Pass Filter, BPF）、带阻滤波器（Band-Stop Filter, BSF）。
- 定义滤波器的边界频率为**截止频率**，允许通过的频率范围为滤波器的**通带**，被抑制的频率范围为**阻带**。

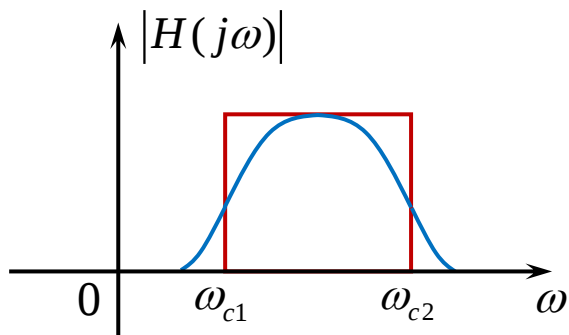
■ 理想低通滤波器的特性



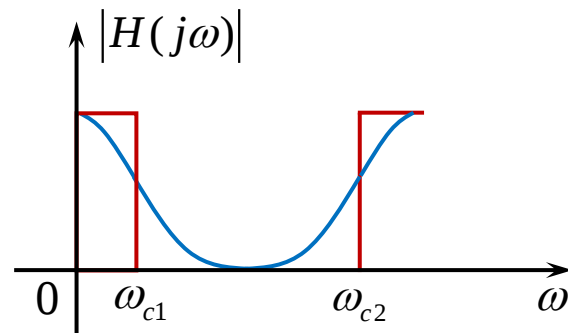
低通滤波器



高通滤波器



带通滤波器



带阻滤波器

理想滤波器的特性在截止频率处陡峭变化，而实际的滤波器在截止频率处并不是陡峭变化，而是具有过渡带和波纹。

■ 理想低通滤波器的特性 **Ideal Low-Pass Filter, ILPF**

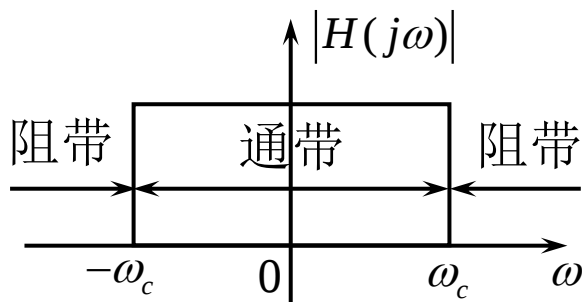
理想低通滤波器的特点

系统允许低于某一频率的所有频率分量无失真的通过，而将高于这一频率的所有频率分量完全阻止。

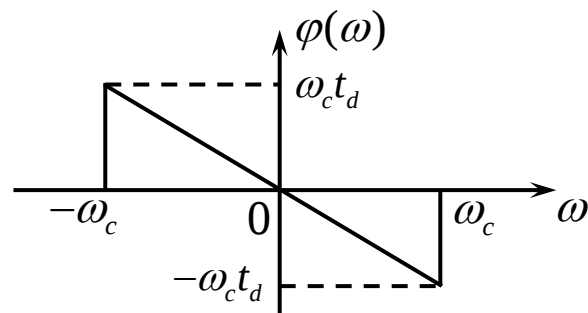
理想低通滤波器的频率特性

$$H(j\omega) = g_{2\omega_c}(\omega)e^{-j\omega t_d} = \begin{cases} e^{-j\omega t_d} & |\omega| \leq \omega_c & \text{通带: } |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c & \text{阻带: } |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

幅频特性 $|H(j\omega)| = g_{2\omega_c}(\omega)$



相频特性 $\varphi(\omega) = -\omega t_d \quad |\omega| \leq \omega_c$

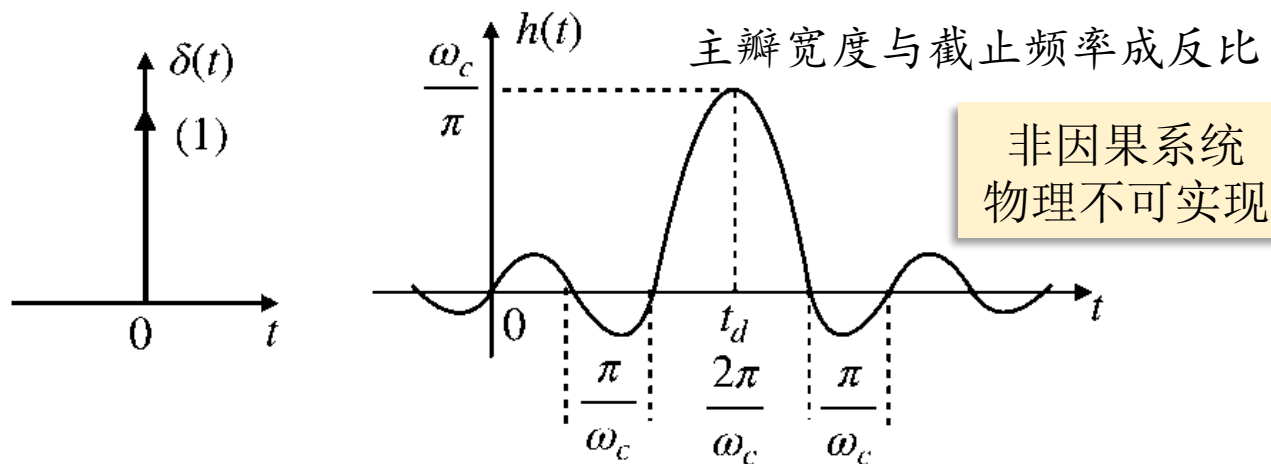


理想低通滤波器在通带内满足无失真传输条件

■ 理想低通滤波器的特性

理想低通滤波器的冲激响应

$$H(j\omega) = g_{2\omega_c}(\omega)e^{-j\omega t_d} \quad \leftrightarrow \quad h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(t - t_d)]$$



- 冲激信号频带无限大，而理想低通滤波器频带有限，频域被截断以后，时域信号将无限延展，产生失真。
- 增大截止频率，滤除的频率分量减少，主瓣宽度减小，失真减少，延时则是相频特性作用的结果。

理想低通滤波器的特性

理想低通滤波器的阶跃响应

$$h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(t-t_d)] \Rightarrow g(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(\tau-t_d)] d\tau$$

$$x = \omega_c(\tau-t_d) \Rightarrow dx = \omega_c d\tau, \tau \in (-\infty, t) \rightarrow x \in (-\infty, \omega_c(t-t_d))$$

$$g(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\omega_c(t-t_d)} \text{Sa}[x] dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \text{Sa}[x] dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c(t-t_d)} \text{Sa}[x] dx$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c(t-t_d)} \text{Sa}[x] dx$$

正弦积分及其性质

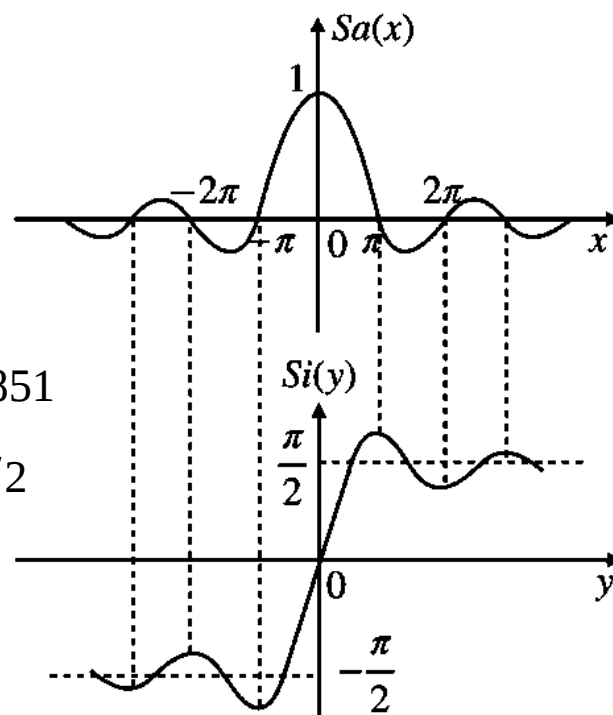
$$\text{Si}(y) = \int_0^y \text{Sa}(x) dx = \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx$$

1) 奇函数

2) 最大值: $\text{Si}(\pi) \approx 1.851$

3) 稳态值: $\text{Si}(\infty) = \pi/2$

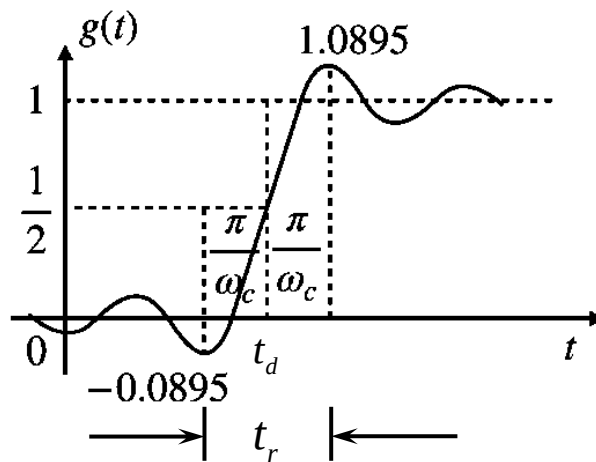
$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}[\omega_c(t-t_d)]$$



■ 理想低通滤波器的特性

理想低通滤波器的阶跃响应

$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}[\omega_c(t - t_d)]$$



➤ 与 $\varepsilon(t)$ 相比，理想低通滤波器的阶跃响应波形也产生了失真，缓慢上升，因为滤波器滤去了决定跳变的高频分量，延时是相频作用的结果。

➤ 上升时间： $t_r = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{1}{f_c} = \frac{1}{B_f}$ 波形上升时间与低通滤波器截止频率成反比。

➤ 响应的过冲与振荡： $g_{\max} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}[\pi] \approx 1.0895$ 吉布斯现象

频域截断，时域无限延伸，且有振荡，其过冲值比稳态值高约9%，且该值与截止频率无关。这一由频率截断效应引起的现象即为吉布斯现象。

■ 物理可实现系统对系统函数的要求

物理可实现系统的时域条件

系统冲激响应和阶跃响应因果 $\begin{cases} h(t) = 0 & t < 0 \\ g(t) = 0 & t < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} h(t) = h(t)\varepsilon(t) \\ g(t) = g(t)\varepsilon(t) \end{cases}$

物理可实现系统的频域条件

佩利-维纳（Paley-Wiener）准则：物理可实现系统的幅频特性应满足

$$1) \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega < \infty \quad (\text{能量有限})$$

$$2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |H(j\omega)|}{1 + \omega^2} d\omega < \infty \quad (\text{不允许在一个有限频带内有 } |H(j\omega)| = 0)$$

对于物理可实现系统， $|H(j\omega)|$ 在某些孤立点上可以为0。

注：准则只对系统幅频特性作出了要求，而没有对相频特性做出要求；该准则只是物理可实现系统的必要条件，而非充分条件。

理想滤波器物理不可实现，因为它们在某段频率范围内幅频为0。

信号与系统

本章结束，谢谢

主讲人：张锦皓 Roger

课件制作：张锦皓 Roger